

1 Rovnica kuželosečky

11.01.16 23.12.15

V tejto a v nasledujúcich kapitolách pracujeme v euklidovskej rovine E^2 , v ktorej je zadaná afinná sústava súradníc.

1.1 Definícia (Predbežná definícia kuželosečky)

Kuželosečka Q je množina bodov v rovine vyjadrená vzhľadom na aktuálnu afinnú sústavu súradníc kvadratickou rovnicou s reálnymi koeficientmi

$$(1.1) \quad ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0, \quad (a, b, c) \neq (0, 0, 0).$$

Užitočný býva mierne upravený tvar rovnice kuželosečky:

$$(1.2) \quad (ax + by + d)x + (bx + cy + e)y + (dx + ey + f) = 0.$$

Niekedy sa namiesto „kuželosečka s rovnicou $ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$ “ hovorí stručne „kuželosečka $ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$ “ alebo „kuželosečka (1.1)“.

Rovnicu (1.1) stručne zapisujeme v podobe

$$(1.3) \quad q(x, y) = 0.$$

1.2 Rovnicu (1.1) môžeme výhodne zapísať pomocou matic. Uvažujme symetrickú maticu

$$(1.4) \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{pmatrix}, \quad (a, b, c) \neq (0, 0, 0),$$

ktorej hovorím *matica kuželosečky* (vzhľadom na aktuálnu sústavu súradníc).

Rozšírené afinné súradnice bodu zapisujeme ako obvykle do stĺpcovej matice

$$\mathbf{X}^{\sim} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = (x \ y \ 1)^T.$$

Rovnicu (1.1) môžeme potom prepísať do podoby

$$(1.5) \quad \mathbf{X}^{\sim T} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{X}^{\sim} = 0.$$

(Symbol T vyjadruje transpozíciu matice, čiže $\mathbf{X}^{\sim T} = (x \ y \ 1)$).

Keď budeme hovoriť o bližšie neurčenej kuželosečke, budeme myslieť kuželosečku Q určenú rovnicou (1.1) resp. maticovou rovnicou (1.5).

V nasledujúcom príklade uvedieme prostredníctvom súradníc elipsu, hyperbolu a parabolu. Ich geometrické definície bez využitia súradníc sú v kapitole 9.

1.3 Príklad Elipsa, hyperbola a parabola z pohľadu analytickej geometrie.

a) Rovnica

$$(1.6) \quad \frac{x^2}{a^2} + \sigma \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0, \quad \sigma = \pm 1, \quad a, b > 0$$

vyjadruje v ľubovoľnej karteziánskej sústave súradníc *elipsu* pre $\sigma = 1$, alebo *hyperbolu* pre $\sigma = -1$. Pri elipse, teda ak $\sigma = 1$, obvykle predpokladáme, že $a \geq b > 0$. Vtedy pre $a = b = r$ vyjadruje rovnica (1.6) *kružnicu* s polomerom r a so stredom v začiatku sústavy súradníc. Z toho dôvodu budeme kružnicu obvykle považovať za špeciálny prípad elipsy, pokiaľ sa nezdôrazní opak.

Pre $a = b$ a $\sigma = -1$ vznikne *rovnoosová hyperbola*. O hyperbolách s rovnicami $x^2/a^2 - y^2/b^2 - 1 = 0$ a $y^2/b^2 - x^2/a^2 - 1 = 0$ hovoríme, že sú navzájom *konjugované*.

Často je výhodné rovnicu elipsy resp. hyperboly (1.6) zapísať v trochu inom tvare

$$(1.7) \quad b^2x^2 + \sigma a^2y^2 - a^2b^2 = 0, \quad \sigma = \pm 1, \quad a, b > 0.$$

Elipsa (aj kružnica) resp. hyperbola s rovnicou (1.6) má maticu

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma \frac{1}{b^2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

b) Rovnica

$$(1.8) \quad y^2 - 2px = 0, \quad p > 0$$

vyjadruje v ľubovoľnej karteziánskej sústave súradníc *parabolu*. Parabola má maticu

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -p \\ 0 & 1 & 0 \\ -p & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

□

1.4 Vieme, že pri transformácii afinných súradníc sú „staré“ súradnice (x, y) a „nové“ súradnice (x', y') bodu X zviazané transformačnými rovnicami

$$(1.9) \quad \begin{cases} x_1 = a_{11}x'_1 + a_{12}x'_2 + a_{10} \\ x_2 = a_{21}x'_1 + a_{22}x'_2 + a_{20} \end{cases}$$

(podrobnejšie pozri Dodatok 1.) Maticový zápis rovníc (1.9) je

$$(1.10) \quad \mathbf{X}^{\sim} = \mathbf{F}^{\sim} \cdot \mathbf{X}'^{\sim},$$

kde

$$\mathbf{F}^{\sim} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{10} \\ a_{21} & a_{22} & a_{20} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}^{\sim} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}'^{\sim} = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Po dosadení z (1.10) do (1.5) má ľavá strana rovnice (1.5) tvar $\mathbf{X}'^{\sim\top} \cdot (\mathbf{F}^{\sim\top} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{F}^{\sim}) \cdot \mathbf{X}^{\sim}$, preto platí nasledujúca veta.

1.5 Veta Pri zmene súradníc (1.10) sa matica kužeľosečky transformuje podľa predpisu

$$\mathbf{Q}' = \mathbf{F}^{\sim\top} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{F}^{\sim}.$$

□

1.6 Definícia a poznámka Hodnosť kužeľosečky je hodnosť jej matice. Kužeľosečka je *regulárna* alebo *singulárna* podľa toho, či jej matica je regulárna alebo singulárna, teda podľa toho, či determinant $\Delta = \det \mathbf{Q}$ je nenulový alebo nulový.

Číslo Δ sa nazýva *veľký diskriminant* rovnice kužeľosečky. Zrejme

$$(1.11) \quad \Delta = acf + 2bde - cd^2 - ae^2 - b^2f.$$

Hodnosť kužeľosečky môže nadobúdať hodnoty 1, 2 a 3. V prvých dvoch prípadoch je kužeľosečka singulárna, v treťom regulárna.

1.7 Príklad Kužeľosečka s rovnicou

$$(x - m)^2 + (y - n)^2 + r^2 = 0, \quad r > 0$$

je regulárna kužeľosečka a je zrejmé, že nemá žiadne body. Ak je aktuálna sústava súradníc karteziánska, uvažovanú kužeľosečku v súlade s tradíciou nazývame *imaginárna kružnica*. Príbuzná rovnica

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 + 1 = 0, \quad a > b > 0$$

vyjadruje v affinej sústave súradníc tzv. *imaginárnu elipsu*.

□

1.8 Veta Hodnosť kužeľosečky nezávisí od sústavy súradníc.

Dôkaz. Z vety 1.5 vyplýva, že $(\mathbf{F}^{-T})^{-1} \cdot \mathbf{Q}' = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{F}^{-1}$. Pretože matice $(\mathbf{F}^{-T})^{-1}$ a $\mathbf{F}^{-1}$ sú regulárne, dostávame, že počet nezávislých stĺpcov matice $\mathbf{Q}'$ sa rovná počtu nezávislých stĺpcov matice $(\mathbf{F}^{-T})^{-1} \cdot \mathbf{Q}'$ a počet nezávislých riadkov matice $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{F}^{-1}$ sa rovná počtu nezávislých riadkov matice $\mathbf{Q}$. Teda hodnota matice kužeľosečky nezávisí od sústavy súradníc. $\square$

Obdobnými postupmi sa na základe vety 1.5 dá dokázať, že všetky v ďalšom uvádzané pojmy a vlastnosti týkajúce sa kužeľosečiek formulované prostredníctvom súradníc nezávisia od voľby sústavy súradníc. Konkrétne preverky tohto faktu prenechávame čitateľovi.

1.9 Príklad Pohľadom na matice v príkladoch 1.3a,b zistíme, že elipsy (vrátane kružníc), hyperboly a paraboly sú regulárne kužeľosečky. $\square$

1.10 Príklad Kužeľosečka s rovnicou

$$x^2 - y^2 = 0$$

je singulárna kužeľosečka hodnoty 2. Ľavú stranu jej rovnice môžeme rozložiť

$$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y),$$

preto uvažovaná kužeľosečka je *dvojica rôznobežiek* s rovnicami

$$x - y = 0, \quad x + y = 0.$$

$\square$

1.11 Príklad Kužeľosečka s rovnicou

$$x^2 + y^2 = 0$$

je singulárna kužeľosečka hodnoty 2. Skladá sa z jediného bodu $O = (0, 0)$. Nad poľom komplexných čísel môžeme ľavú stranu rovnice rozložiť

$$x^2 + y^2 = (x - iy)(x + iy),$$

preto v súlade s tradíciou hovoríme, že kužeľosečka je zjednotením dvoch navzájom komplexne združených imaginárnych rôznobežiek s rovnicami

$$x - iy = 0, \quad x + iy = 0,$$

ktoré sa pretínajú v bode $O = (0, 0)$. Táto kužeľosečka sa tradične nazýva *dvojica imaginárnych rôznobežiek*. $\square$

1.12 Príklad Kužeľosečka s rovnicou

$$x^2 - 1 = 0$$

je singulárna kužeľosečka hodnoty 2. Ľavú stranu jej rovnice môžeme rozložiť

$$x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1),$$

preto uvažovaná kužeľosečka je *dvojica rovnobežiek* s rovnicami

$$x - 1 = 0, \quad x + 1 = 0.$$

$\square$

1.13 Príklad Kužeľosečka s rovnicou

$$x^2 + 1 = 0$$

je singulárna kužeľosečka hodnoty 2. Je to prázdna množina. Nad poľom komplexných čísel môžeme ľavú stranu rovnice rozložiť

$$x^2 + 1 = (x - i)(x + i),$$

preto opäť v súlade s tradíciou hovoríme, že kužeľosečka je *dvojica imaginárnych rovnobežiek* s rovnicami

$$x - i = 0, \quad x + i = 0.$$

$\square$

1.14 Príklad Kužeľosečka s rovnicou

$$x^2 = 0$$

je singulárna kužeľosečka hodnoty 1. Jej rovnica je ekvivalentná s rovnicou $x = 0$, preto táto kužeľosečka je priamka, a sice os y . Vzhľadom na rozklad

$$x^2 = xx$$

v súlade s tradíciou hovoríme, že kuželosečka je *dvojnásobná priamka* s rovnicou $x = 0$.

1.15 Poznámky 1 Niektoré z predchádzajúcich príkladov možno zovšeobecniť takto (podrobnosti prenechávame čitateľovi): Ak p_1 resp. p_2 sú priamky s rovnicami $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ resp. $a_2x + b_2y + c_2 = 0$, tak ich zjednotenie je singulárna kuželosečka s rovnicou

$$(a_1x + b_1y + c_1)(a_2x + b_2y + c_2) = 0.$$

2 Pomocou vhodnej transformácie sústavy súradníc (pozri vetu 8.1) sa dá dokázať že

- kružnica, elipsa, hyperbola, parabola, imaginárna kružnica a imaginárna elipsa predstavujú všetky regulárne kuželosečky,
- dvojica rôznobežiek, dvojica rovnobežiek, dvojica imaginárnych rôznobežiek a dvojica imaginárnych rovnobežiek sú všetky singulárne kuželosečky hodnosti 2,
- dvojnásobná priamka je jediná singulárna kuželosečka hodnosti 1.

V ďalšom sa budeme venovať najmä regulárnym reálnym kuželosečkám, teda kružniciam, elipsám, hyperbolám a parabolám, i keď ostatné zo svojich úvah úplne nevylučujeme.

1.16 Všimnime si kuželosečky $Q_1: x^2 + y^2 + 1 = 0$ a $Q_2: x^2 + 1 = 0$. Obom rovnicam nevyhovuje ani jeden bod, preto podľa definície 1.1 $Q_1 = \emptyset = Q_2$. V príkladoch 1.4 a 1.13 sme ale zistili, že prvá kuželosečka je regulárna a druhá singulárna, preto by bolo lepšie považovať ich za rôzne kuželosečky. Východiskom z dilemy je nový prístup k definovaniu kuželosečky.

1.17 Definícia 1. Kuželosečka je v každej afinnej sústave súradníc určená rovnicou tvaru (1.1) resp. symetrickou maticou tvaru (1.4). Hovoríme o *rovnici kuželosečky* resp. o *matici kuželosečky*.

2. Dve rovnice resp. dve matice určujú v rovnakej sústave súradníc rovnakú kuželosečku, ak jedna je (nenulovým) skalárnym násobkom druhej.

3. Matice $\mathbf{Q}$ a $\mathbf{Q}'$ určujú v rôznych afinných sústavách súradníc rovnakú kuželosečku, ak $\mathbf{Q}' = k\mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{F}^{-}$, kde $\mathbf{F}^{-}$ je transformačná matica medzi sústavami súradníc a $k \neq 0$.

4. Bod kuželosečky je každý bod euklidovskej roviny, ktorého súradnice vyhovujú rovnici kuželosečky.

Kuželosečku určenú v aktuálnej sústave súradníc maticou $\mathbf{Q}$ budeme označovať Q . Hoci podľa tejto definície kuželosečka už nie je množina bodov, skutočnosť, že bod X je bodom kuželosečky Q budeme naďalej vyjadrovať frázou, že bod X leží na kuželosečke Q a budeme to zapisovať doterajším spôsobom $X \in Q$.

1.18 Poznámky o afinných transformáciách kuželosečky.

1. Pri novom prístupe ku kuželosečkám je veta 1.5 tretou časťou definície 1.17.

2. Na druhej strane, komplikuje sa zobrazovanie kuželosečiek transformáciami roviny, lebo už nestačí jednoducho zobrazovať body kuželosečky, musí sa transformovať jej rovnica:

Uvažujme kuželosečku Q s rovnicou $q(x,y) = 0$ a afinnú transformáciu $f: E^2 \rightarrow E^2$ s rovnicami

$$(1.12) \quad \begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y + a_{10} \\ y' = a_{21}x + a_{22}y + a_{20} \end{cases}$$

Potom kuželosečka $f(Q)$ je určená rovnicou $q(f^{-1}(x,y)) = 0$. Rovnica transformovanej kuželosečky teda vznikne tak, že z rovníc (1.12) vyjadríme (x,y) pomocou (x',y') , dosadíme do rovnice $q(x,y) = 0$ kuželosečky Q a neznáme opäť zapíšeme symbolmi x, y .

3. Bodmi transformovanej kuželosečky $f(Q)$ sú práve obrazy všetkých bodov kuželosečky Q .

4. Rovnica kuželosečky $f(Q)$ v pôvodnej sústave súradníc je totožná s rovnicou kuželosečky Q v sústave súradníc, ktorej repér (t.j. začiatok a jednotkové vektory) vznikne z repéru pôvodnej sústavy súradníc transformáciou f .

5. Kuželosečky Q a Q' sú *afinne ekvivalentné* resp. *zhodné* resp. *navzájom podobné*, ak jedna vznikne z druhej afinnou transformáciou resp. zhodnosťou resp. podobnosťou.

1.19. Príklad Posunutím kružnice $x^2 + y^2 - r^2 = 0$ so stredom v začiatku O sústavy súradníc o vektor $\mathbf{u} = (u, v)$ vznikne kružnica s rovnicou $(x - u)^2 + (y - v)^2 + r^2 = 0$, teda kružnica s rovnakým polomerom, ale so stredom v bode $O + \mathbf{u}$. Dôvodom je skutočnosť, že inverzná transformácia k uvažovanému posunutiu je posunutie o vektor $-\mathbf{u}$, teda jej rovnice sú $x = x' - u$, $y = y' - v$. Rovnicu posunutej kružnice môžeme prepísať do štandardného tvaru (1.1) ako $x^2 + y^2 - 2ux - 2vy - r^2 + u^2 + v^2 = 0$. $\square$

1.20 Príklad Každé dve kružnice sú navzájom podobné. Naozaj, uvažujme kružnice

$$k_i: (x - m_i)^2 + (y - n_i)^2 - r_i^2 = 0, \quad r_i > 0, \quad i = 1, 2.$$

Pre $r_1 \neq r_2$ trpezlivým počítaním dostaneme, že rovnoláhosť

$$\left. \begin{aligned} x' &= (r_2/r_1)x && + (m_2 - (r_2/r_1)m_1) \\ y' &= && (r_2/r_1)y + (n_2 - (r_2/r_1)n_1) \end{aligned} \right\}$$

transformuje kružnicu k_1 do kružnice k_2 (úloha 1.24.9). $\square$

1.21 Ťažkosti spomínané v odseku 1.16 vznikajú iba pri kuželosečkách, ktoré majú málo bodov, presnejšie ak majú najviac jeden bod. V súlade s tradíciou, *reálna kuželosečka* je kuželosečka s aspoň dvomi bodmi (vtedy ich má nekonečne veľa). V opačnom prípade hovoríme o *imaginárnej kuželosečke*. Hovorí sa tiež o *bodovo reálnej kuželosečke* resp. o *formálne reálnej kuželosečke*.

Neskôr uvidíme (veta 8.7), že vo vhodnej afinskej sústave súradníc má každá imaginárna kuželosečka rovnicu z príkladov 1.7, 1.11, 1.13.

Posledné dve vety tejto kapitoly uvádzame bez dôkazu (úloha 1.24.8).

1.22 Veta Označme $\delta = ac - b^2$, $\Delta = \det Q$. Potom kuželosečka je imaginárna práve vtedy, keď je splnená jedna z podmienok

$$\begin{aligned} \delta > 0 \quad \text{a} \quad a\Delta > 0 & \quad (\text{imaginárna elipsa resp. kružnica}), \\ \Delta = 0 \quad \text{a} \quad \delta > 0 & \quad (\text{dvojica imaginárnych rôznobežiek}), \\ \Delta = 0 \quad \text{a} \quad \delta = 0 \quad \text{a} \quad af - d^2 > 0 & \quad (\text{dvojica imaginárnych rovnobežiek}). \end{aligned} \quad \square$$

1.23 Veta o určení kuželosečky: Každými piatimi bodmi roviny, z ktorých žiadne štyri neležia na priamke, prechádza práve jedna kuželosečka. $\square$

1.24 Úlohy

1 a) Dokážte, že graf nepriamej úmernosti $y = k/x$, $x \neq 0$, je kuželosečka a zostavte jej maticu.

b) Je uvažovaná kuželosečka singulárna lebo regulárna? [Regulárna.]

c) Nájdite rovnicu kuželosečky $y = k/x$, $k > 0$ v sústave súradníc, ktorá vznikne z pôvodnej karteziánskej sústavy súradníc otočením o 45 stupňov okolo začiatku sústavy súradníc.

$[x'^2/a^2 - y'^2/a^2 - 1 = 0$, kde $a = \sqrt{2k}$.]

Návod: Uvažované otočenie sústavy súradníc vyjadrujú rovnice $x = (\sqrt{2}/2)x' - (\sqrt{2}/2)y'$, $y = (\sqrt{2}/2)x' + (\sqrt{2}/2)y'$.]

d) Ide o niektorú zo známych kuželosečiek? [Hyperbola (rovnoosová), pozri časť c).]

2 Dokážte, že afinná transformácia $x' = (a/r)x$, $y' = (b/r)y$ zobrazuje kružnicu s rovnicou $x^2 + y^2 - r^2 = 0$ na elipsu s rovnicou $x'^2/a^2 + y'^2/b^2 - 1 = 0$.

[Návod: $x'^2/a^2 + y'^2/b^2 - 1 = 1/r^2(x^2 + y^2 - r^2)$.]

3 Zástavová konštrukcia bodov elipsy a) Dokážte, že afinná transformácia $x' = x$, $y' = (b/a)y$ zobrazuje kružnicu $x^2 + y^2 - a^2 = 0$ na elipsu $x'^2/a^2 + y'^2/b^2 - 1 = 0$ a že transformácia $x' = (a/b)x$, $y' = y$ zobrazuje kružnicu $x^2 + y^2 - b^2 = 0$ na rovnakú elipsu $x'^2/a^2 + y'^2/b^2 - 1 = 0$.

b) Zo začiatku sústavy súradníc vypustíte ľubovoľnú polpriamku a zostrojíte na nej body M, N tak že, $|OM| = a$, $|ON| = b$. Bodom M resp. N ved'ete rovnobežku s osou Oy resp. Ox . Dokážte, že priesečník týchto priamok leží na elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 - 1 = 0$.

4 a) Dokážte tvrdenia 3, 4 z poznámky 1.18.

b) Porovnajte hodnotu kuželosečky Q s hodnotou jej afinného obrazu $f(Q)$.

*5 Dokážte tvrdenie z poznámky 1.15 o zjednotení dvoch priamok.

6 a) Nájdite nutnú a postačujúcu podmienku, aby rovnica (1.1) vyjadrovala kružnicu a určte jej stred a polomer.

b) Aká kuželosečka vznikne, ak nie je splnená nerovnosť z výsledku časti a)?

[a) $a = c \neq 0$, $b = 0$, $a(d^2 + e^2 - a^2f) > 0$. $S = (-d/a, -e/a)$, $r^2 = (d^2 + e^2 - a^2f)/a^3$. b) Imaginárna kružnica alebo dvojica imaginárnych rôznobežiek (príklad 1.7 alebo 1.11).]

*7 (Zväzok kuželosečiek) Uvažujme navzájom rôzne kuželosečky Q_1 a Q_2 , ich rovnice zapíšme v zjednodušenom tvare $q_1(x,y) = 0$ a $q_2(x,y) = 0$. Pre ľubovoľné konštanty $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ uvažujme tretiu rovnicu $q(x,y) = 0$, kde $q(x,y) = \lambda q_1(x,y) + \mu q_2(x,y)$.

a) Dokážte, že pre takmer všetky $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ rovnica $q(x,y) = 0$ určuje kuželosečku a sformulujte výnimky. Sú medzi kuželosečkami $q(x,y) = 0$ aj kuželosečky Q_1 a Q_2 ?

b) Čo možno povedať o kuželosečkách zväzku určeného dvomi kružnicami?

*8 (Dôkaz vety 1.23 pomocou zväzkov kuželosečiek) Nech žiadne tri z bodov A_1, A_2, A_3, A_4 neležia na priamke a nech Q_1 resp. Q_2 sú kuželosečky tvorené dvojicami priamok A_1A_2, A_3A_4 resp. A_1A_4, A_2, A_3 .

a) Dokážte, že každá kuželosečka zo zväzku určeného kuželosečkami Q_1 a Q_2 prechádza bodmi A_1, A_2, A_3, A_4 .

b) Dokážte: Ak žiadne štyri z daných piatich bodov neležia na priamke, tak medzi danými bodmi existujú také štyri, že žiadne tri z nich neležia na priamke.

c) Dokáže vetu 1.23. [Návod: postupne využite tvrdenia z častí b), a).]

*9 Podrobne spracujte príklad 1.20. [Návod: Každá rovnoľahlosť v rovine má rovnice $x' = cx + d$, $y' = cy + e$. Konštanty c, d, e určte tak, aby sa rovnica kružnice k_1 zmenila na rovnicu kružnice k_2 . Asi vás rýchlo napadne, že možno položiť $c = r_2/r_1$ (alebo tiež $c = -r_2/r_1$). Nezaбудnite na možnosť $r_1 = r_2$.]

*10 Presvedčte sa, elipsa resp. hyperbola $x^2/a^2 + x^2/b^2 - 1 = 0$ má v sústave súradníc so začiatkom v bode $V = (-\sigma a, 0)$ rovnicu

$$(1.13) \quad y^2 = 2px + (-\sigma p/a)x^2,$$

kde $p = b^2/a$. (Vo výsledku sme súradnice označili opäť x, y .) Vznikla tzv. *vrcholová rovnica elipsy resp. hyperboly*, číslo p sa nazýva *parameter elipsy resp. hyperboly*. Všimnite si príbuznosť s parabolou.

Oproti rovnici paraboly dodatočný člen $(-\sigma p/a)x^2$ vo vrcholovej rovnici (1.13) je pre elipsu záporný a pre hyperbolu kladný. Názvy elipsa a hyperbola pochádzajú zo starogréčtiny a znamenajú vynechanie a prebytok, parabola znamená porovnanie. Názvy kuželosečiek súvisia aj s inými ich vlastnosťami, pozri odsek 9.12.

2 Priamka a kuželosečka. Asymptotický smer

2.1 Uvažujme kuželosečku Q s rovnicou (1.1) a priamku p určenú bodom $M = (m, n)$ a (nenulovým) vektorom $\mathbf{u} = (u, v)$. Priamku p vyjadríme parametricky. Bod $X = M + t\mathbf{u}$ je spoločným bodom priamky p a kuželosečky Q práve vtedy, keď jeho parameter t vyhovuje rovnici

$$a(m + tu)^2 + 2b(m + tu)(n + tv) + c(n + tv)^2 + 2d(m + tu) + 2e(n + tv) + f = 0,$$

teda rovnici

$$(2.1) \quad At^2 + 2Bt + C = 0,$$

kde

$$(2.1.A) \quad A = au^2 + 2buv + cv^2,$$

$$(2.1.B) \quad B = (am + bn + d)u + (bm + cn + e)v = (au + bv)m + (bu + cv)n + du + ev,$$

$$(2.1.C) \quad C = am^2 + 2bmn + cn^2 + 2dm + 2en + f.$$

2.2 Veta Pre priamku a kuželosečku z odseku 2.1 nastáva práve jedna z možností:

1. $A \neq 0, B^2 - AC > 0$: Rovnica (2.1) má dva rôzne reálne korene. Priamka má s kuželosečkou spoločné dva rôzne body.
2. $A \neq 0, B^2 - AC = 0$: Rovnica (2.1) má jeden dvojnásobný koreň. Priamka má s kuželosečkou spoločný práve jeden bod.
3. $A \neq 0, B^2 - AC < 0$: Rovnica (2.1) nemá reálne korene. Priamka kuželosečku nepretína.
4. $A = 0, B \neq 0$: Rovnica (2.1) je lineárna a má práve jeden koreň. Priamka má s kuželosečkou spoločný práve jeden bod.
5. $A = B = 0, C \neq 0$: Rovnica (2.1) nemá žiadny koreň. Priamka kuželosečku nepretína.
6. $A = B = C = 0$: Rovnica (2.1) je splnená pre všetky $t \in \mathbf{R}$. Priamka leží na kuželosečke. $\square$

2.3 Dôsledok Priamka, ktorá obsahuje tri rôzne body kuželosečky, leží na kuželosečke. $\square$

Pripomeňme, že jednorozmerný vektorový podpriestor euklidovského priestoru ľubovoľnej dimenzie sa nazýva *smer*. Smer je určený nenulovým vektorom alebo priamkou. Možno teda povedať, že dve priamky sú rovnobežné práve vtedy, keď majú rovnaký smer.

2.4 Definícia Asymptotický vektor kuželosečky je vektor, ktorého súradnice vyhovujú rovnici

$$(2.2) \quad au^2 + 2buv + cv^2 = 0.$$

Asymptotický smer kuželosečky je jednorozmerný vektorový podpriestor roviny, ktorého každý vektor je asymptotický.

Dvojnásobný asymptotický smer kuželosečky je smer určený sústavou rovníc

$$(2.3) \quad \begin{cases} au + bv = 0 \\ bu + cv = 0. \end{cases}$$

Jednoduchý asymptotický smer kuželosečky je asymptotický smer, ktorý nie je dvojnásobný.

2.5 Poznámka a) Priamka má asymptotický smer vzhľadom na kuželosečku Q práve vtedy, keď koeficient A v rovnici (2.1) je nulový, teda práve vtedy, keď ich spoločné body určuje lineárna rovnica $2Bt + C = 0$. Teda vo vete 2.2 ide o prípady 4, 5, 6.

b) Dvojnásobný asymptotický smer je asymptotický smer, lebo

$$au^2 + 2buv + cv^2 = (au + bv)u + (bu + cv)v.$$

c) Nulový vektor je asymptotický vektor. Podpriestor generovaný nenulovým asymptotickým vektorom je asymptotický smer, lebo $a(ku)^2 + 2b(ku)(kv) + c(kv)^2 = k^2(au^2 + 2buv + cv^2)$.

d) Počet asymptotických smerov kuželosečky je daný počtom po dvoch lineárne nezávislých asymptotických vektorov.

e) Asymptotické vektory kuželosečky alternatívne opisuje maticová rovnica

$$(2.4) \quad \mathbf{U}^{-T} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{U}^{-} = 0$$

kde $\mathbf{U}^{-} = (u \ v \ 0)^T$ je matica rozšírených súradníc vektora $\mathbf{u} = (u, v)$.

2.6 Definícia Sečnica kuželosečky je priamka, ktorá ju pretína v práve dvoch rôznych bodoch (veta 2.2, prípad 1) alebo ju pretína v jedinom bode a má asymptotický smer (veta 2.2, prípad 4).

Dotyčnica regulárnej kuželosečky v bode P je priamka, ktorá kuželosečku pretína v jedinom bode P a nemá asymptotický smer (veta 2.2, prípad 2). Bod P je bod dotyku dotyčnice. Priamka idúca bodom dotyku kolmo na dotyčnicu kuželosečky sa nazýva *normála kuželosečky*.

Asymptota regulárnej kuželosečky je priamka, ktorá kuželosečku nepretína a má asymptotický smer (veta 2.2, prípad 5).

2.7 Poznámka Rýchly spôsob výpočtu dotyčnice v danom bode kuželosečky nám dá veta 4.3a, výpočet asymptoty nájdeme v úlohe 5.11.7.

2.8 Definícia Číslo $\delta = ac - b^2 = \begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix}$ sa nazýva *malý diskriminant* rovnice kuželosečky.

(Stretli sme sa s ním už vo vete 1.22. Je to determinant sústavy (2.3).)

Kuželosečka s rovnicou (1.1) má *eliptický typ*, *hyperbolický typ* alebo *parabolický typ* podľa toho, či malý diskriminant rovnice kuželosečky $\delta = ac - b^2$ je kladný, záporný alebo nulový.

2.9 Príklad Sami sa presvedčte, že

- a) elipsa, kružnica, imaginárna kružnica a imaginárna elipsa má eliptický typ,
- b) hyperbola má hyperbolický typ,
- c) parabola má parabolický typ,
- d) dve navzájom rôzne rovnobežky, dvojica imaginárnych rovnobežiek a dvojnásobná priamka (príklady 1.12, 1.13 a 1.14) sú kuželosečky s parabolickým typom,
- e) dvojica rôznobežiek (príklad 1.10) a dvojica imaginárnych rôznobežiek (príklad 1.11) sú kuželosečky hyperbolického typu. $\square$

2.10 Veta Typ kuželosečky určuje počet jej asymptotických smerov a naopak:

- a) Kuželosečka eliptického typu ($\delta > 0$) nemá asymptotické smery.
- b) Kuželosečka parabolického typu ($\delta = 0$) má práve jeden asymptotický smer, a ten je dvojnásobný asymptotický smer.
- c) Kuželosečka hyperbolického typu ($\delta < 0$) má práve dva asymptotické smery, oba sú jednoduché asymptotické smery.

Dôkaz. Nech najprv $a = 0$. Vtedy $\delta = -b^2 \leq 0$ a rovnica (2.2) má tvar $v(2bu + cv) = 0$. Pre $\delta < 0$ je $b \neq 0$ a rovnica (2.2) má práve dva jednorozmerné podpriestory riešení generované vektormi $(u_1, v_1) = (1, 0)$ a $(u_2, v_2) = (-c, 2b)$. Odpovedajúce asymptotické smery sú na základe poznámky 2.5b jednoduché. Ak $\delta = 0$, tak $b = 0$ a $c \neq 0$ (lebo $a = b = 0$ a $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$). Vtedy predchádzajúce netriviálne riešenia splynú do jediného $(u, v) = (1, 0)$. Navyše zrejme $au + bv = 0$, $bu + cv = 0$, teda asymptotický smer je dvojnásobne asymptotický. Pre $a = 0$ teda veta platí.

Nech teraz $a \neq 0$. Vtedy pre každé netriviálne riešenie rovnice (2.2) platí $v \neq 0$, preto je rovnica ekvivalentná s kvadratickou rovnicou

$$(2.5) \quad a(u/v)^2 + 2b(u/v) + c = 0, \quad a \neq 0.$$

Jej diskriminant je -4δ . Pre $\delta < 0$ má rovnica (2.5) práve dve navzájom rôzne riešenia $(u/v)_{1,2} = [-b \pm \sqrt{-\delta}]/a$, ktorým odpovedajú práve dve lineárne nezávislé riešenia pôvodnej rovnice $(u_{1,2}, v_{1,2}) = (-b \pm \sqrt{-\delta}, a)$. Odpovedajúce asymptotické smery sú jednoduché, lebo $\delta \neq 0$. Pre $\delta = 0$ má rovnica (2.5) práve jedno riešenie $u/v = -b/a$, ktorému odpovedá jediné lineárne nezávislé riešenie $(u, v) = (-b, a)$ pôvodnej rovnice. Zrejme $au + bv = 0$, $bu + cv = 0$, teda asym-

ptotický smer je dvojnásobne asymptotický. Pre $\delta > 0$ nemá rovnica (2.5) riešenie, preto pôvodná rovnica (2.2) má iba triviálne riešenie $u = v = 0$. $\square$

2.11 Príklad a) Asymptotické smery hyperboly s rovnicou $x^2/a^2 - y^2/b^2 - 1 = 0$, $a, b > 0$ určuje rovnica

$$b^2u^2 - a^2v^2 = 0.$$

Jej ľavú stranu možno rozložiť $b^2u^2 - a^2v^2 = (bu + av)(bu - av)$, preto uvažovaná hyperbola má práve dva asymptotické smery; sú určené vektormi $\mathbf{u}_1 = (-a, b)$ a $\mathbf{u}_2 = (a, b)$ a oba sú jednoduché.

Uvažovaná hyperbola má práve dve asymptoty s rovnicami $bx + ay = 0$ a $bx - ay = 0$. Naozaj, vzhľadom na svoj asymptotický smer musí každá asymptota mať rovnicu tvaru $bx + ay + c = 0$ alebo $bx - ay + c = 0$. Priamky s takými rovnicami nepretínajú hyperbolu práve vtedy, keď $c = 0$, lebo práve vtedy sústava rovníc

$$\begin{array}{l} bx \pm ay + c = 0 \\ x^2/a^2 - y^2/b^2 - 1 = 0 \end{array}$$

nemá riešenie.

b) Asymptotické smery paraboly s rovnicou $y^2 - 2px = 0$ určuje rovnica

$$v^2 = 0,$$

preto uvažovaná parabola má práve jeden asymptotický smer; určený je vektorom $\mathbf{u} = (1, 0)$ a je dvojnásobný. Asymptotický smer paraboly $y^2 - 2px = 0$ je smer osi Ox .

Uvažovaná parabola nemá asymptoty, lebo každá priamka s asymptotickým smerom má rovnicu tvaru $y + c = 0$, preto kužeľosečku pretína (v bode so súradnicami $(c^2/(2p), -c)$).

c) Elipsa s rovnicou $x^2/a^2 + y^2/b^2 - 1 = 0$, $a, b > 0$ nemá žiadne asymptotické smery, lebo rovnica $b^2u^2 + a^2v^2 = 0$ má iba triviálne riešenie $u = v = 0$. Následne elipsa nemá ani asymptoty. $\square$

2.12 Úlohy

1 Nájdite asymptotické smery kužeľosečky a) $2xy + f = 0$, b) $x^2 - 2xy + y^2 + 2x + 6y - 5 = 0$, c) $x^2 - 2xy + 2y^2 + 4x - 6y + 3 = 0$. [a) (1,0), (0,1) b) (1,1), c) neexistujú]

2 Nájdite asymptoty kužeľosečky z úlohy 1a. [$x = 0, y = 0$.]

3 Nájdite spoločné body priamky AB , $A = (5, 1)$, $B = (9, -1)$ s kužeľosečkou $x^2 + 4y^2 - 25 = 0$. [Body $(4, 3/2)$, $(3, 2)$]

4 Daná je kužeľosečka $Q: x^2 - 2xy + 2y^2 + 2x + 2y + 1 = 0$ a priamky $p: x - y + k = 0$, $k \in \mathbf{R}$.

a) V závislosti od parametra $k \in \mathbf{R}$ určite počet spoločných bodov priamok s kužeľosečkou.

b) Sú priamky s jediným priesečníkom dotyčnicami kužeľosečky Q ?

[a) $k < -1$ alebo $k > 3$: 0 bodov, $k = -1$ alebo $k = 3$: 1 bod, $-1 < k < 3$: 2 body. b) Áno.]

5 a) Dokážte, že každá priamka pretína regulárnu kužeľosečku v najviac dvoch bodoch.

b) Dokážte, že regulárna kužeľosečka neobsahuje priamky ani úsečky.

c) Obsahuje každá singulárna kužeľosečka priamku alebo úsečku?

[Návod: a) Stačí skúmať prienik kužeľosečky (1.1) s osou Ox . c) Nie.]

6 Dokážte: Hyperbola s rovnicou $x^2/a^2 - y^2/b^2 - 1 = 0$ a s ňou konjugovaná hyperbola s rovnicou $y^2/b^2 - x^2/a^2 - 1 = 0$ majú totožné asymptoty.

7 Vetva hyperboly s rovnicou $x^2/a^2 - y^2/b^2 - 1 = 0$ je množina všetkých jej bodov, ktorých prvé súradnice majú rovnaké znamienko. Podrobnejšie sformulujte a dokážte tvrdenie: Obe vetvy hyperboly sa neobmedzene približujú k oboj asymptotám. [Návod: Vyjadrite vetvu hyperboly ako graf funkcie $x = f(y)$.]

*8 Ako sa zjednoduší rovnica regulárnej kužeľosečky, keď os Ox je asymptotou?

[$2bxy + cy^2 + 2ey + f = 0$, $b, f \neq 0$]

***9** Ako sa zjednoduší rovnica regulárnej kužeľosečky, ak sa jej v bode $O = (0, 0)$ dotýka os Ox ? [$d = f = 0, a, e \neq 0$]

10 a) Dokážte: Ak priamka leží na kužeľosečke, tak jej smer je asymptotický. [Návod: Veta 2.2.]

b) Nájdite asymptotické smery kužeľosečky, ktorá je zjednotením dvoch priamok (rôznobežných, rovnobežných, totožných).

11 Dokážte, že obsah rovnobežníka, ktorého dve strany ležia na asymptotách hyperboly $x^2/a^2 - y^2/b^2 - 1 = 0$ a jeden vrchol je bod hyperboly, je $ab/2$.

12 a) Dokážte, že kužeľosečka $Q: 6xy + 8y^2 - 12x - 26y + 11 = 0$ je regulárna.

b) V každom bode $M = (m, n)$ kužeľosečky Q nájdite všetky priamky, ktoré kužeľosečku pretínajú iba v tom bode.

c) Medzi priamkami z časti b) identifikujte dotyčnicu.

[b) Priamky $M\mathbf{u}_0, M\mathbf{u}_1, M\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_0 = (-3m - 8n + 13, 3n - 6), \mathbf{u}_1 = (1, 0), \mathbf{u}_2 = (-4, 3)$. c) $M\mathbf{u}_0$.]

3 Stred a singulárny bod kuželosečky

3.1 Definícia Bod roviny je *stred kuželosečky* s rovnicou (1.1) práve vtedy, keď jeho súradnice vyhovujú sústave rovníc

$$(3.1) \quad \begin{cases} ax + by + d = 0 \\ bx + cy + e = 0 \end{cases}$$

Stredová kuželosečka je kuželosečka, ktorá má práve jeden stred. V opačnom prípade (žiadny stred alebo aspoň dva stredy) je kuželosečka *nestredová*.

3.2 Príklady 1 Elipsa (resp. kružnica) resp. hyperbola s rovnicou $b^2x^2 + \sigma a^2y^2 - a^2b^2 = 0$, $\sigma = \pm 1$, $a, b > 0$, má jediný stred $S = (0, 0)$. Sú to teda stredové kuželosečky.

2 Parabola s rovnicou $y^2 - 2px = 0$, nemá stred, je to nestredová kuželosečka. Dôvod: Prvá z rovníc pre stred je $-2p = 0$, a teda nemá riešenie.

3 Imaginárna kružnica s rovnicou $(x - m)^2 + (y - n)^2 + r^2 = 0$, $r > 0$, má jediný stred $S = (m, n)$. Opäť máme stredovú kuželosečku. Toto je jeden z dôvodov, prečo namiesto definície 1.1 pracujeme s definíciou 1.17. Imaginárne kružnice s rôznymi stredmi považujeme za rôzne kuželosečky, hoci majú rovnaké množiny bodov, a síce prázdnu množinu.

4 Dvojica rovnobežiek s rovnicou $x^2 - 1 = 0$ je nestredová kuželosečka. Má nekonečne veľa stredov, vyplňajú priamku $x = 0$.

Aj dvojica imaginárnych rovnobežiek s rovnicou $x^2 + 1 = 0$ je nestredová kuželosečka. Tiež má celú priamku teda nekonečne veľa stredov, hoci samotná kuželosečka žiadne body nemá. $\square$

3.3 Lemma Ak je začiatok sústavy súradníc stredom kuželosečky (1.1), tak $d = e = 0$.

V tomto prípade má rovnica kuželosečky tvar

$$(3.2) \quad ax^2 + 2bxy + cy^2 + f = 0, \quad (a, b, c) \neq (0, 0, 0). \quad \square$$

3.4 Veta Kuželosečka je súmerná podľa svojho stredy, teda stred kuželosečky je jej stredom súmernosti.

Dôkaz. Zvoľme takú sústavu súradníc, že stred kuželosečky je začiatkom sústavy súradníc. Podľa predchádzajúcej lemy na základe rovnice (3.2) vidíme, že kuželosečka s každým bodom $X = (x, y)$ obsahuje aj bod $X' = (-x, -y)$ súmerný k bodu X podľa stredy $S = (0, 0)$. $\square$

3.5 Veta Kuželosečka je stredová práve vtedy, keď jej malý diskriminant δ je nenulový.

Dôkaz. Malý diskriminant δ je determinant matice sústavy lineárnych rovníc (3.1). Z algebry je známe, že sústava toho typu má jediné riešenie, ak je determinant jej matice nenulový. Ak je ten determinant nulový, sústava nemá riešenie alebo má nekonečne veľa riešení. $\square$

3.6 Definícia Bod roviny je *singulárny bod kuželosečky* s rovnicou (1.1), ak jeho súradnice vyhovujú sústave rovníc

$$(3.3) \quad \begin{cases} ax + by + d = 0 \\ bx + cy + e = 0 \\ dx + ey + f = 0 \end{cases}$$

alebo ekvivalentne jednej maticovej rovnici

$$(3.4) \quad \mathbf{Q} \cdot \mathbf{X}^T = \mathbf{0}.$$

Bod kuželosečky, ktorý nie je jej singulárnym bodom, je *regulárny bod kuželosečky*.

Dôkaz nasledujúcej vety prenechávame čitateľovi (úloha 3.10.5).

3.7 Veta a) Singulárny bod kuželosečky je jej bodom.

b) Singulárny bod je stredom kuželosečky.

c) Ak je stred kuželosečky jej bodom, tak je singulárnym bodom kuželosečky. $\square$

3.8 Poznámka a) Ak má kuželosečka singulárny bod, je singulárna. Naozaj, ak $X = (x, y)$ je singulárny bod kuželosečky, tak zo sústavy rovností (3.3) vyplýva, že tretí stĺpec matice $\mathbf{Q}$ je lineárnou kombináciou prvých dvoch s koeficientmi $-x, -y$, teda matica $\mathbf{Q}$ je singulárna.

b) Časť a) tejto poznámky hovorí, že, regulárna kuželosečka má iba regulárne body. Naproti tomu singulárna kuželosečka môže mať všetky body singulárne (napr. dvojnásobná priamka $x^2 = 0$), všetky body regulárne (napr. dvojica rovnobežiek $x^2 - 1 = 0$) alebo singulárne aj regulárne body (napr. dvojica rôznobežiek $x^2 - y^2 = 0$ má jeden singulárny bod $O = (0, 0)$, ostatné sú regulárne).

3.9 Príklad Z matíc v príkladoch 1.3a,b vidíme, že elipsy (vrátane kružníc), hyperboly a paraboly sú regulárne kuželosečky, preto podľa poznámky 3.8a nemajú singulárne body. $\square$

3.10 Úlohy

1 Podrobne spracujte príklady 3.2.1 – 3.2.4.

2 Podrobne spracujte poznámku 3.8b.

3 Zostavte rovnicu kuželosečky, ak má stred $S = (1, -1)$, prechádza bodom $M = (-1, 2)$ a jej asymptotické smery sú určené vektormi $\mathbf{u} = (0, 1)$, $\mathbf{v} = (1, 1)$. [$2x^2 - 2xy - 6x + 2y - 16 = 0$]

4 Určite parametre $k, l \in \mathbf{R}$ tak, aby bod $S = (1, -1)$ bol stredom kuželosečky $kx^2 + 4xy + ly^2 + 2x + 2y - 1 = 0$. [$k = 1, l = 5$]

*5 Dokážte vetu 3.7. [Návod. a) Rovnica (1.2) a sústava (3.3). b) Sústavy (3.1) a (3.3). c) Sústava (3.1), rovnica (1.2) a sústava (3.3).]

6 Je každý stred súmernosti kuželosečky jej stredom? [Vo všeobecnosti nie.]

7 a) Nájdite stred kuželosečky, ktorá je zjednotením dvoch rôznobežiek.

b) Nájdite všetky stredy kuželosečky, ktorá je zjednotením dvoch priamok.

[Návod: a), b) Zvoľte čo najvhodnejšiu afinnú sústavu súradníc.]

8 Presvedčte sa, že kuželosečka $x^2 + xy - 2y^2 - x + 4y - 2 = 0$ je zjednotením dvoch rôznobežiek a zostavte ich rovnice. [Návod: Využite úlohy 3.10.7a a 2.12.10.]

9 Vypočítajte stred kuželosečky a) $6xy + 8y^2 - 12x - 26y + 11 = 0$, b)

[a) $(-1, 2)$]

10 Pre ktoré hodnoty $k, l \in \mathbf{R}$ kuželosečka $kx^2 + 12xy + 9y^2 + 4x + ly - 13 = 0$ a) je stredová,

b) nemá stred, c) má nekonečne veľa stredov. [a) $k \neq 4, l \in \mathbf{R}$, b) $k = 4, l \neq 6$, c) $k = 4, l = 6$.]

11 Presvedčte sa, že kuželosečka $x^2 - 6xy + 9y^2 - 12x + 36y + 20 = 0$ má priamku stredov a napíšte rovnice rovnobežných priamok, z ktorých sa skladá. [Priamka stredov je $x - 3y - 6 = 0$, kuželosečka je zjednotenie priamok $x - 3y - 10 = 0$, $x - 3y - 2 = 0$.]

4 Polára bodu

4.1 Definícia Polára bodu $M = (m, n)$ vzhľadom na kužeľosečku Q s rovnicou (1.1) je množina všetkých bodov roviny vyjadrená rovnicou

$$(4.1) \quad (am + bn + d)x + (bm + cn + e)y + (dm + en + f) = 0.$$

Vzhľadom na (1.2) poláru bodu M ekvivalentne vyjadruje maticová rovnica

$$(4.2) \quad (\mathbf{M}^{-\top} \cdot \mathbf{Q}) \cdot \mathbf{X} = 0.$$

Poláru bodu M vzhľadom na kužeľosečku Q zapisujeme symbolom $Q(M)$.

4.2 Veta a) Polárou singulárneho bodu kužeľosečky je celá rovina E^2 .

b) Polárou stredu kužeľosečky, ktorý nie je singulárnym bodom, je prázdna množina.

c) Polárou bodu, ktorý nie je stredom kužeľosečky, je priamka.

Dôkaz. a) Podľa definície 3.4, rovnica poláry singulárneho bodu je $0x + 0y + 0 = 0$.

b) Podľa definície 3.1 má rovnica poláry stredu kužeľosečky tvar $0x + 0y + r = 0$. Ak stred nie je singulárny bod, definícia 3.6 dáva, že $r \neq 0$. Takejto rovnici nevyhovuje žiadny bod.

c) Z predpokladu a z definície 4.1 vyplýva, že polára uvažovaného bodu má rovnicu tvaru $px + qy + r = 0$, pričom p alebo q nie je nula, preto polára je priamka.

4.3 Veta a) Priamka je dotyčnicou regulárnej kužeľosečky Q v bode M práve vtedy, keď je polárou bodu M vzhľadom na kužeľosečku Q .

b) Regulárna kužeľosečka má v každom bode práve jednu dotyčnicu.

Dôkaz. a) Uvažujme ľubovoľný bod $M \in Q$ a ľubovoľnú priamku p , ktorá ním prechádza. Zvoľme afinnú sústavu súradníc so začiatkom v bode M , pre ktorú je osou Ox je priamka p . Ďalej stačí využiť tvrdenia z úloh 2.12.9 a 4.9.4a b.

b) Tvrdenie je zrejším dôsledkom prvej časti vety. □

4.4 Príklad Dotyčnica kružnice s rovnicou $x^2 + y^2 - r^2 = 0$ v bode $M = (m, n)$ je polára bodu M , teda priamka s rovnicou $mx + ny - r^2 = 0$. Táto priamka zrejme prechádza bodom M , lebo $m^2 + n^2 - r^2 = 0$ a je kolmá na spojnicu OM stredu kružnice s bodom M , lebo $M - O = (m, n)$ je smerový vektor tej spojnice. Teda pre kružnicu dáva definícia dotyčnice z odseku 2.2 dotyčnicu v bežnom zmysle. □

4.5 Príklady a) Dotyčnica elipsy (vrátane kružnice) resp. hyperboly s rovnicou $x^2/a^2 + \sigma y^2/b^2 - 1 = 0$, $\sigma = \pm 1$ v bode $M = (m, n)$ má rovnicu

$$(m/a^2)x + \sigma(n/b^2)y - 1 = 0.$$

b) Dotyčnica paraboly s rovnicou $y^2 - 2px = 0$ v bode $M = (m, n)$ má rovnicu

$$-px + ny - pm = 0. \quad \square$$

4.6 Veta (Súmernosť polarity) Ak druhý bod leží na poláre prvého bodu, tak polára druhého bodu prechádza prvým bodom. Symbolicky

$$(4.3) \quad P \in Q(M) \Rightarrow M \in Q(P).$$

Dôkaz priamočiary. Uvažujme kužeľosečku Q s rovnicou (1.1) a body $M = (m, n)$, $P = (p, q)$. Tvrdenie je priamym dôsledkom definície poláry bodu a zrejmej rovnosti $(am + bn + d)p + (bm + cn + e)q + (dm + en + f) = (ap + bq + d)m + (bp + cq + e)n + (dp + eq + f)$. □

Dôkaz maticový. $P \in Q(M) \Rightarrow \mathbf{M}^{-\top} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{P} = 0 \Rightarrow (\mathbf{M}^{-\top} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{P})^{\top} = 0^{\top} \Rightarrow \mathbf{P}^{-\top} \cdot \mathbf{Q}^{\top} \cdot \mathbf{M}^{-\top\top} = 0 \Rightarrow \mathbf{P}^{-\top} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{M} = 0 \Rightarrow M \in Q(P)$. □

4.7 Poznámka Z predchádzajúcej vety o súmernosti polarity a z vety 4.3a vyplýva geometrická interpretácia poláry bodu: Ak bod leží na dvoch rôznych dotyčniciach regulárnej kužeľosečky, tak jeho polárou je spojnica dotykových bodov dotyčníc.

Obrátene, ak bod M neleží na regulárnej kuželosečke Q , tak dotyčnicu z neho ku kuželosečke môžeme získať ako spojnicu bodu M s priesečníkom poláry $Q(M)$ s kuželosečkou.

4.8 Príklad Nájdime dotyčnicu paraboly $y^2 - 36x = 0$ prechádzajúcu bodom $M = (2, 9)$.

Riešenie. Polára bodu M má rovnicu $-2x + y - 4 = 0$. Jej priesečníky s kuželosečkou sú určené sústavou rovníc $-2x + y - 4 = 0$, $y^2 - 18y + 72 = 0$, sú to teda body $P = (4, 12)$ a $R = (1, 6)$. Hľadanými dotyčnicami sú priamky MP : $3x - 2y + 12 = 0$ a MR : $3x - y + 3 = 0$. $\square$

4.9 Úlohy

1 Bodom $M = (3, 4)$ veďte dotyčnice ku kuželosečke $2x^2 - 4xy + y^2 - 2x + 6y - 3 = 0$. [t_1 : $7x - 2y - 13 = 0$, t_2 : $x - 3 = 0$]

2 Napíšte rovnicu dotyčnice t kuželosečky Q : $3x^2 + 4xy + 5y^2 - 7x - 8y - 3 = 0$ v bode $T = (?, 1)$. [$T_1 = (-1, 1)$, t_1 : $9x + 2y + 7 = 0$, $T_1 = (2, 1)$, t_2 : $9x + 10y - 28 = 0$]

3 Napíšte rovnicu dotyčnice t kuželosečky Q : $x^2 + 2xy - y^2 + 6x = 0$ v jej priesečníkoch s osou x . [$T_1 = (0, 0)$, t_1 : $x = 0$, $T_1 = (-6, 0)$, t_2 : $x + 2y + 6 = 0$]

*4 a) Vypočítajte poláru kuželosečky Q v bode $O = (0, 0)$, $O \in Q$. [$dx + ey + f = 0$]

b) Ako sa zjednoduší rovnica regulárnej kuželosečky, ak prechádza bodom $O = (0, 0)$ a jeho polárou je os Ox ? [$d = f = 0$, $a, e \neq 0$]

5 Uvažujme hyperbolu $x^2/a^2 - y^2/b^2 - 1 = 0$. a) Dokážte, že bod dotyku rozpolňuje úsečku, ktorú na dotyčnici hyperboly vytínajú asymptoty.

b) Dokážte, že obsah trojuholníka, ktorého dve strany ležia na asymptotách a tretia na dotyčnici hyperboly, je ab .

*6 Dokážte, že pre regulárnu kuželosečku (1.1) a pre funkciu $q(x, y)$ zo vzorca (1.3) je vektor

$$\text{grad } q(m, n) = \left(\frac{\partial q(m, n)}{\partial x}, \frac{\partial q(m, n)}{\partial y} \right)$$

normálovým vektorom dotyčnice kuželosečky v bode $M = (m, n)$.

Tento vektor sa nazýva *gradient funkcie* $q(x, y)$ v bode M . Alternatívne sa označuje $\nabla q(m, n)$ (symbol ∇ sa číta nabla resp. del).

7 Navrhните konštrukciu poláry bodu, ktorý neobsahuje žiadnu dotyčnicu regulárnej kuželosečky, teda, keď sa nedá postupovať podľa poznámky 4.7.

[Návod: Daným bodom preložte sečnicu kuželosečky, v jej priesečníkoch s kuželosečkou zostrojte dotyčnice kuželosečky a využite vety 4.3a a 4.6.]

8 Dokážte, že dotyčnica paraboly s rovnicou $y^2 - 2px = 0$ je pre y idúce do $+\infty$ a do $-\infty$ „čoraz viac vodorovnejšia“. Inými slovami, smer dotyčnice sa blíži k dvojnásobnému asymptotickému smeru paraboly. Formálnejšie: pre $n \rightarrow +\infty$ a pre $n \rightarrow -\infty$ jednotkový normálový vektor dotyčnice paraboly v bode $M = (m, n)$ konverguje k vektoru $(0, 1)$ alebo $(0, -1)$.

9 Zostavte rovnicu kuželosečky, ktorá

a) má stred $S = (1, -2)$, prechádza bodom $P = (0, -3)$ a dotýka sa osi x v začiatku sústavy súradníc,

b) má stred $S = (0, 0)$, prechádza bodom $A = (6, -2)$ a dotýka sa priamky $x - 2 = 0$ v bode $B = (2, 0)$.

[a) $x^2 + xy + y^2 + 3y = 0$, b) $x^2 - 8y^2 - 4 = 0$.]

10 Dokážte: Poláry všetkých bodov asymptoty hyperboly $x^2/a^2 - y^2/b^2 - 1 = 0$ sú rovnobežné s tou polárou.

5 Polára smeru. Priemer kuželosečky

5.1 Definícia a poznámky Polára nenulového vektora $\mathbf{u} = (u, v)$ vzhľadom na kuželosečku Q s rovnicou (1.1) je množina bodov $Q(\mathbf{u})$ roviny opísaná rovnicou

$$(5.1) \quad (au + bv)x + (bu + cv)y + (du + ev) = 0.$$

Ak vektor nie je dvojnásobným asymptotickým vektorom, jeho polára je priamka. Zrejme pre poláru každého nenulového vektora smeru $U = \langle \mathbf{u} \rangle$ dostaneme rovnicu ekvivalentnú s rovnicou (5.1), teda rovnakú priamku. Nazývame ju *polára smeru U* a zapisujeme ju symbolom $Q(U)$.

Polára dvojnásobne asymptotického smeru kuželosečky je prázdna množina alebo rovina E^2 .

Polára neasymptotického smeru U sa nazýva *priemer kuželosečky*. Hovoríme, že *priemer $Q(U)$ je združený so smerom U* .

Poláru smeru U , teda aj priemer kuželosečky vyjadruje maticová rovnica

$$(5.2) \quad (\mathbf{U}^{-T} \cdot \mathbf{Q}) \cdot \mathbf{X} = 0.$$

Porovnajte ju s rovnicou (4.2).

5.2 Príklad (Pokračovanie príkladu 2.11) a) Priemer elipsy resp. kružnice s rovnicou $x^2/a^2 + y^2/b^2 - 1 = 0$ združený so smerom ľubovoľného nenulového vektora $\mathbf{u} = (u, v)$ je priamka s rovnicou $(u/a^2)x + (v/b^2)y = 0$ prechádzajúca stredom $S = (0, 0)$. Naopak každá priamka prechádzajúca stredom S je priemerom uvažovanej elipsy.

b) Hyperbola $x^2/a^2 - y^2/b^2 - 1 = 0$ má práve dva jednoduché asymptotické smery určené vektormi $\mathbf{u}_1 = (-a, b)$, $\mathbf{u}_2 = (a, b)$. Poláry týchto smerov sú asymptoty hyperboly. Polárou každého iného smeru U roviny je priemer hyperboly s rovnicou $(u/a^2)x - (v/b^2)y = 0$. Naopak každá priamka prechádzajúca stredom $S = (0, 0)$ je priemerom alebo asymptotou uvažovanej hyperboly.

c) Parabola s rovnicou $y^2 - 2px = 0$ má práve jeden (dvojnásobný) asymptotický smer, a síce smer určený vektorom $\mathbf{u} = (1, 0)$, teda smer osi Ox . Polárou každého iného smeru U je priemer uvažovanej paraboly s rovnicou $vy - pu = 0$. Priermi uvažovanej paraboly sú práve všetky rovnobežky s osou Ox . $\square$

5.3 Lema a) Vektor $\mathbf{u}$ je smerovým vektorom poláry $Q(\mathbf{u})$ práve vtedy, keď je (jednoduchý) asymptotický vektor.

b) Ak os Ox je priemer kuželosečky združený so smerom osi Oy , tak $b = e = 0$, $c \neq 0$. Rovnica kuželosečky má vtedy tvar

$$(5.3) \quad ax^2 + cy^2 + 2dx + f = 0, \quad c \neq 0.$$

c) Voľba afinnej sústavy súradníc, o ktorej sa hovorí v časti b), je vždy možná.

Dôkaz. a) Stačí dosadiť súradnice (u, v) vektora $\mathbf{u}$ do homogénnej časti rovnice (5.1) za x, y .

b) Smer osi Oy je určený vektorom $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$. Zo sústavy rovníc (2.3) vyplýva, že tento smer nie je dvojnásobne asymptotický práve vtedy, keď $b \neq 0$ alebo $c \neq 0$. Priemer $Q(\mathbf{e}_2)$ má rovnicu $bx + cy + e = 0$. Ak je táto priamka os Ox , tak $b = e = 0$ a $c \neq 0$.

c) Za vektor $\mathbf{e}_2$ zvolíme ľubovoľný nie asymptotický vektor, za vektor $\mathbf{e}_1$ vezmeme nenulový smerový vektor priemeru $Q(\mathbf{e}_2)$ a za začiatok sústavy súradníc zvolíme ľubovoľný bod $O \in Q(\mathbf{e}_2)$. Podľa prvej časti lemy sú tieto vektory lineárne nezávislé. $\square$

5.4 Veta a) Kuželosečka je (šikmo) súmerná podľa svojho priemeru, pričom smer súmernosti je smer, s ktorým je priemer združený.

b) Stredy všetkých navzájom rovnobežných tetív kuželosečky ležia na priemere združenom so smerom tetív. (Tetivou rozumieme úsečku, ktorá spája dva rôzne body kuželosečky a neobsahuje žiadny ďalší bod kuželosečky.)

Dôkaz. Zvoľme takú sústavu súradníc, že os Ox je priemer kužeľosečky združený so smerom osi Oy . Podľa predchádzajúcej lemy je táto voľba súradníc možná a rovnica kužeľosečky má podobu $ax^2 + cy^2 + 2dx + f = 0$. Vidíme, že kužeľosečka obsahuje s každým bodom $X = (x, y)$ aj bod $X' = (x, -y)$ súmerný k bodu X podľa osi Ox v smere osi Oy . $\square$

5.5 Veta a) Poláry všetkých smerov stredovej kužeľosečky, teda aj všetky priemery stredovej kužeľosečky, prechádzajú stredom kužeľosečky.

b) Všetky priemery nestredovej kužeľosečky sú navzájom rovnobežné a majú (dvojnásobný) asymptotický smer.

Dôkaz. Uvažujme poláru $Q(U)$ smeru U s rovnicou (5.1).

a) Nech $M = (m, n)$ je stred kužeľosečky. Vtedy $(au + bv)m + (bu + cv)n + (du + ev) = (am + bn + d)u + (bm + cn + e)v = 0u + 0v = 0$ kvôli definícii stredu kužeľosečky.

b) Smer priemeru $Q(U)$ určuje vektor $\mathbf{u}' = (-bu - cv, au + bv)$. Toto je asymptotický vektor, lebo $a(-bu - cv)^2 + 2b(-bu - cv)(au + bv) + c(au + bv)^2 = (ac - b^2)(au^2 + 2buv + cv^2) = 0$ kvôli vete 3.5. Nestredová kužeľosečka nemá jednoduché asymptotické smery, preto je vektor $\mathbf{u}'$ dvojnásobne asymptotický vektor. $\square$

5.6 Veta a) Ak bod M leží na priemere združenom so smerom U a nie je stred kužeľosečky, tak jeho polára má smer U .

b) Dotyčnica v priesečníku regulárnej kužeľosečky s jej priemerom $Q(U)$ má smer U .

Dôkaz. Uvažujme poláru $Q(U)$ s rovnicou (5.1).

a) Nech bod $M = (m, n)$ nie je stred kužeľosečky a nech leží na poláre $Q(\mathbf{u})$, $\mathbf{u} = (u, v)$. Vtedy $0 = (au + bv)m + (bu + cv)n + (du + ev) = (am + bn + d)u + (bm + cn + e)v = 0$, preto vektor $\mathbf{u}$ je smerový vektor poláry $Q(M)$, teda určuje smer poláry bodu M .

b) Tvrdenie je priamym dôsledkom prvej časti vety a vety 4.3. $\square$

5.7 Príklad Určme dotyčnicu kužeľosečky $x^2 + xy + y^2 + 2x + 3y - 3 = 0$ rovnobežnú s osou x . V našom prípade $a = 2$, $b = 1$, $c = 2$, $d = 2$, $e = 3$, $f = -3$. Polára smeru vektora $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$ je priamka $2x + y + 2 = 0$, jej spoločné body s kužeľosečkou sú $A = (1, -4)$, $B = (-5/3, 4/3)$. Dotyčnice v nich sú poláry bodov A, B , teda priamky $y + 4 = 0$ a $3y - 4 = 0$. $\square$

5.8 Definícia Smer určený vektorom $\mathbf{u}' = (u', v')$ je združený so smerom určeným vektorom $\mathbf{u} = (u, v)$, ak

$$(5.4) \quad auu' + b(uv' + u'v) + cvv' = 0.$$

Maticová podoba rovnice združených smerov je

$$(5.5) \quad \mathbf{U}^{-T} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{U}' = 0.$$

5.9 Veta a) Relácia združenosti smerov je symetrická, preto hovoríme o navzájom združených smeroch.

b) Smer poláry $Q(U)$ je združený so smerom U .

c) Smer je asymptotický práve vtedy, keď je združený so sebou.

d) Pre stredovú kužeľosečku s rovnicou (1.1) je so smerom určeným vektorom $\mathbf{u} = (u, v)$ združený smer určený vektorom $\mathbf{u}' = (-bu - cv, au + bv)$. Rôznym smerom odpovedajú rôzne združené smery.

e) Pre nestredovú kužeľosečku je s každým smerom združený (dvojnásobne) asymptotický smer kužeľosečky.

Dôkaz všetkých tvrdení je jednoduchý, prenechávame ho čitateľovi. $\square$

5.10 Definícia *Združené priemery* sú dva priemery stredovej kužeľosečky (teda kužeľosečky s eliptickým alebo hyperbolickým typom), ktorých smery sú navzájom združené.

Je zrejmé, že každý z dvoch navzájom združených priemerov je združený so smerom druhého z nich.

5.11 Úlohy

1 Táto úloha sa netýka kužeľosečiek. Nech $ABCD$ je štvoruholník, pričom $AB \parallel CD$ a AD je rovnobežné s BC . Dokážte, že spojnice priesečníkov $AD \cap BC$ a $AC \cap BD$ prechádza stredmi strán AB , CD . [Návod: Uvážte rovnobežnosti so stredmi v bodoch $AD \cap BC$ a $AC \cap BD$.]

2 Nech $ABCD$ je štvoruholník vpísaný do regulárnej kužeľosečky, pričom $AB \parallel CD$. Dokážte

a) Priemer združený so smerom priamky AB prechádza stredmi strán AB a CD .

b) Ak sú dvojice priamok AD , BC a AC , BD rovnobežné, tak spojnice ich priesečníkov je priemer združený so smerom priamky AB .

[Návod: a) Využite vetu 5.4b. b) Využite úlohu 5.11.1.]

3 Trojuholník tvorený bodmi dotyku dvoch dotyčníc kužeľosečky a ich priesečníkom:

a) Dokážte, že priesečník dotyčníc v dvoch rôznych bodoch regulárnej kužeľosečky leží na priemere, ktorý je združený so smerom spojnice dotykových bodov.

b) Dokážte, že spojnica priesečníka dotyčníc v dvoch rôznych bodoch regulárnej kužeľosečky so stredom dotykových bodov je priemer kužeľosečky združený so smerom spojnice dotykových bodov.

c) Dokážte, že spojnica stredy S dvoch bodoch $M \neq N$ paraboly $y^2 - 2px = 0$ s priesečníkom P dotyčníc v so bodov M , N pretína parabolu v jedinom bode, ktorým je stred bodov P , S .

4 Dokážte: Spojnica bodov dotyku dvoch rovnobežných dotyčníc kužeľosečky je priemer združený so smerom dotyčníc.

5 Uvažujme elipsu Q s rovnicou $x^2/a^2 + y^2/b^2 - 1 = 0$. Dokážte: a) Každý priemer pretína elipsu v dvoch rôznych bodoch.

b) Elipsa Q s každým bodom bod $X = (x, y)$ obsahuje aj bod $X' = (-ay/b, bx/a)$ smery určené polohovými vektormi bodov X a X' sú navzájom združené.

c) Všetky rovnobežníky ohraničené dotyčnicami v priesečníkoch elipsy s jej združenými priermi majú rovnaký obsah. [Návod: Všimnite si rovnobežník, ktorého tri vrcholy sú body X , X' z časti b) a začiatok O .]

d) Združenosť priemerov je pre reálnu elipsu Q a odpovedajúcu imaginárnu elipsu $x^2/a^2 + y^2/b^2 + 1 = 0$ rovnaká.

6 Uvažujme hyperbolu s rovnicou $x^2/a^2 - y^2/b^2 - 1 = 0$ a s ňou konjugovanú hyperbolu s rovnicou $y^2/b^2 - x^2/a^2 - 1 = 0$ (príklad 1.3b). Dokážte:

a) Združené priemery hyperboly sú združenými priermi aj konjugovanej hyperboly.

b) Spojnica bodov dotyku dvoch rovnobežných dotyčníc konjugovanej hyperboly je priemer pôvodnej hyperboly združený so smerom dotyčníc.

c) Hyperbolu pretína práve jeden z dvoch združených priemerov. Priemer, ktorý nepretína hyperbolu, pretína konjugovanú hyperbolu.

d) Všetky rovnobežníky ohraničené dotyčnicami hyperboly a konjugovanej hyperboly v priesečníkoch s ich združenými priermi majú rovnaký obsah.

7 Dokážte: Priamka je asymptotou regulárnej kužeľosečky práve vtedy, keď je polárou (jednoduchého) asymptotického smeru. [Návod: Sústavu súradníc zvolte tak, že priamkou je os Ox a využite úlohu 2.12.8.]

8 Dokážte: a) Združené priemery kružnice resp. imaginárnej kružnice sú navzájom kolmé.

b) Elipsa resp. imaginárna elipsa, ktorá nie je kružnicou resp. imaginárnou kružnicou, má aspoň jednu dvojicu združených priemerov, ktoré nie sú navzájom kolmé. (V skutočnosti sú také skoro všetky.)

c) Sformulujte a dokážte tvrdenia príbuzné s obsahom úlohy 5.11.8a, b pre rovnoosovú hyperbolu (príklad 1.3a).

9 Určte dotyčnice kužeľosečky $x^2 + xy + y^2 + 2x + 3y - 3 = 0$ rovnobežné s priamkou $2x + 2y + 5 = 0$ a body dotyku. [$x + y - 1 = 0$, $(1, 0)$, $3x + 3y + 13 = 0$, $(-5/3, -8/3)$.]

10 Napíšte rovnicu priemeru kužeľosečky $2x^2 + 4xy + 5y^2 - 8x + 6 = 0$ rovnobežného s priamkou $2x - y + 5 = 0$. [$2x - y + 6 = 0$.]

11 Napíšte rovnicu priemeru kužeľosečky $5x^2 - 3xy + y^2 - 3x + 2y - 5 = 0$ ktorý prechádza stredom tetivy vytvorenej kužeľosečkou na priamke $p: x - 2y - 1 = 0$. [$17x - 4y - 4 = 0$.]

12 Napíšte rovnicu priemeru kužeľosečky $4xy - 5y^2 + 2x + 6y + 1 = 0$, ktorý prechádza bodom $M(2, 1)$. [$3x + 2y + 6 = 0$.]

6 Vnútro a vonkajšok regulárnej kužeľosečky

V tejto kapitole sa zaoberáme iba regulárnymi kužeľosečkami, teda predpokladáme, že veľký diskriminant kužeľosečky je nenulový, t.j. $\Delta \neq 0$.

6.1 Definícia Bod M neležiaci na regulárnej kužeľosečke Q s rovnicou (1.1) je *vonkajší bod kužeľosečky*, ak leží na nejakej dotyčnici alebo asymptote kužeľosečky. Ak ním žiadna dotyčnica ani asymptota neprechádza, ide o *vnútorný bod kužeľosečky*. Množina všetkých vnútorných resp. vonkajších bodov tvorí *vnútro* resp. *vonkajšok* kužeľosečky.

6.2 Lema Nech bod $M = (m, n)$ neleží na kužeľosečke Q a nech $\mathbf{u} = (u, v)$ je nenulový vektor. Potom priamka $M\mathbf{u}$ je dotyčnicou alebo asymptotou kužeľosečky Q práve vtedy, keď pre čísla A, B, C , definované rovnosťami (2.1A), (2.1B), (2.1C) platí $B^2 - AC = 0$.

Dôkaz. Uvedomme si, že predpoklad $M \notin Q$ je ekvivalentný s $C \neq 0$ a výrok $A = B = 0, C \neq 0$ je ekvivalentný s $A = 0, B^2 - AC = 0$ a $C \neq 0$. Z druhej a tretej časti definície 2.6 teraz vyplýva, že priamka $M\mathbf{u}$ je asymptotou alebo dotyčnicou kužeľosečky Q práve vtedy, keď $B^2 - AC = 0$. $\square$

6.3 Veta Bod $M = (m, n)$ je vnútorný resp. vonkajší bod regulárnej kužeľosečky práve vtedy, keď číslo $am^2 + 2bmn + cn^2 + 2dm + 2en + f = 0$ má rovnaké resp. opačné znamienko ako veľký diskriminant Δ rovnice kužeľosečky.

Inými slovami: vnútro resp. vonkajšok kužeľosečky je určený nerovnicou

$$\text{vnútro:} \quad \Delta(ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f) > 0,$$

$$\text{vonkajšok:} \quad \Delta(ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f) < 0.$$

Dôkaz. Priamočiarym výpočtom dostaneme, že pre číslo $B^2 - AC$ vytvorené z koeficientov rovnice (2.1) platí

$$B^2 - AC = \alpha u^2 + 2\beta uv + \gamma v^2,$$

kde

$$\alpha = (b^2 - ac)n^2 + 2(bd - ae)n + d^2 - af,$$

$$\beta = (ac - b^2)mn + (ae - bd)m + (cd - be)n + de - bf,$$

$$\gamma = (b^2 - ac)m^2 + 2(be - cd)m + e^2 - cf.$$

Lema 6.2 teraz hovorí, že bod M je vonkajší bod kužeľosečky Q práve vtedy, keď rovnica

$$\alpha u^2 + 2\beta uv + \gamma v^2 = 0$$

má nenulové riešenie (u, v) . Postup z dôkazu vety 2.10 o počte asymptotických smerov kužeľosečky dáva, že nenulové riešenie rovnice existuje práve vtedy, keď $\beta^2 - \alpha\gamma > 0$. Trpezlivé počítanie prinesie, že $\beta^2 - \alpha\gamma = -\Delta(am^2 + 2bmn + cn^2 + 2dm + 2en + f)$. $\square$

6.4 Príklad a) Vnútro resp. vonkajšok elipsy (prípadne kružnice) s rovnicou $x^2/a^2 + y^2/b^2 - 1 = 0$ vyjadruje analyticky nerovnica $x^2/a^2 + y^2/b^2 - 1 < 0$ resp. $x^2/a^2 + y^2/b^2 - 1 > 0$. Dôvodom je veta 6.3 a rovnosť $\Delta = -1/(a^2b^2)$. Teda napr. stred elipsy je jej vnútorným bodom.

b) Podobne vnútro resp. vonkajšok hyperboly s rovnicou $x^2/a^2 - y^2/b^2 - 1 = 0$ vyjadruje nerovnica $x^2/a^2 + y^2/b^2 - 1 > 0$ resp. $x^2/a^2 + y^2/b^2 - 1 < 0$, stred hyperboly je jej vonkajším bodom.

c) Vnútro resp. vonkajšok paraboly s rovnicou $y^2 - 2px = 0$ vyjadruje analyticky nerovnica $y^2 - 2px < 0$ resp. $y^2 - 2px > 0$. Okrem vety 6.3 je dôvodom rovnosť $\Delta = -p^2$. $\square$

6.5 Úlohy

1 Určte vnútro a vonkajšok kužeľosečky a) $Q: x^2 - 2xy + 2y^2 + 2x + 2y + 1 = 0$, b) $25x^2 - 14xy + 25y^2 + 64x - 64y - 224 = 0$, c) $9x^2 - 24xy + 16y^2 - 20x + 110y - 50 = 0$
[Vnútrajšok a) $x^2 - 2xy + 2y^2 + 2x + 2y + 1 > 0$, b) $25x^2 - 14xy + 25y^2 + 64x - 64y - 224 > 0$.]

- 2 Dokážte, že každá priamka, ktorá obsahuje aspoň jeden vnútorný bod regulárnej kužeľosečky, je sečnicou kužeľosečky.
- 3 a) Dokážte, že vnútro elipsy je konvexná množina.
b) Je konvexné aj vnútro hyperboly a vnútro paraboly?

7 Osi a vrcholy kuželosečky

V tejto kapitole používame iba karteziánske sústavy súradníc.

7.1 Definícia Os kuželosečky je jej priemer kolmý na smer, s ktorým je združený. Vrchol kuželosečky je priesečník kuželosečky s jej osou.

7.2 Veta Kuželosečka je (kolmo) súmerná podľa každej svojej osi.

Dôkaz. Veta vyplýva z vety 5.4a. □

7.3 Veta Priemer združený so smerom vektora $\mathbf{u} = (u, v)$ je osou kuželosečky Q práve vtedy, keď súradnice vektora $\mathbf{u}$ vyhovujú sústave rovníc

$$(7.1) \quad \begin{cases} (a - \lambda)u + bv = 0 \\ bu + (c - \lambda)v = 0 \end{cases}$$

pričom λ je nenulové riešenie kvadratickej rovnice $(a - \lambda)(c - \lambda) - b^2 = 0$, čiže rovnice

$$(7.2) \quad \lambda^2 - (a + c)\lambda + ac - b^2 = 0.$$

Dôkaz. Priemer $Q(\mathbf{u})$ je osou kuželosečky práve vtedy, keď vektor $\mathbf{u} = (u, v)$ je kolmý na priamku

$$(au + bv)x + (bu + cv)y + du + ev = 0.$$

To je zrejme práve vtedy, keď normálový vektor $\mathbf{n} = (au + bv, bu + cv)$ priamky $Q(\mathbf{u})$ je nenulovým násobkom vektora $\mathbf{u}$, čiže práve vtedy, keď existuje také číslo $\lambda \neq 0$, že $au + bv = \lambda u$ a $bu + cv = \lambda v$, čo je sústava rovníc (7.1). Vektor $\mathbf{u}$ je nenulový, teda jeho súradnice sú netriviálnym riešením sústavy (7.1). Takáto sústava má netriviálne riešenie práve vtedy, keď determinant matice sústavy je nulový, čo je zrejme ekvivalentné s podmienkou (7.2). □

7.4 Poznámka Veta 7.3 dáva návod, ako nájsť všetky osi (a teda aj všetky vrcholy) kuželosečky s rovnicou (1.1):

1. Vyhľadáť rovniciu (7.2).
2. Pre každý nenulový koreň λ rovnice (7.2) vziať ľubovoľné nenulové riešenie (u, v) sústavy (7.1).
3. Priemer $Q(\mathbf{u})$ združený so smerom vektora $\mathbf{u} = (u, v)$ je osou kuželosečky.

7.5 Poznámka V kurzoch lineárnej algebry sa uvádza, že číslo λ a vektor $\mathbf{u} = (u, v)$ z vety 7.3 je vlastné číslo a vlastný vektor lineárnej transformácie $V(E^2) \rightarrow V(E^2)$

$$\begin{aligned} x' &= ax + by \\ y' &= bx + cy \end{aligned}$$

7.6 Príklady a) Uvažujme elipsu resp. hyperbolu s rovnicou $b^2x^2 + \sigma a^2y^2 - a^2b^2 = 0$, $\sigma = \pm 1$. V tomto prípade kružnicu nepovažujeme za špeciálny prípad elipsy, teda pre $\sigma = 1$, predpokladáme, že $a > b$. Pre uvažované kuželosečky má rovnica (7.2) tvar

$$\lambda^2 - (\sigma a^2 + b^2)\lambda + \sigma a^2b^2 = 0.$$

Rovnica má dve riešenia $\lambda_1 = b^2$ a $\lambda_2 = \sigma a^2$, ktoré sú obe nenulové. Pre prvé riešenie má sústava rovníc (7.1) podobu

$$\begin{cases} 0 = 0 \\ [\sigma a^2 - b^2]v = 0 \end{cases}$$

Pre $\sigma = 1$ platí $\sigma a^2 - b^2 = a^2 - b^2 \neq 0$, lebo $a > b$. Pre $\sigma = -1$ platí $\sigma a^2 - b^2 = -a^2 - b^2 \neq 0$, lebo $a, b \neq 0$. Sústava má teda netriviálne riešenie $\mathbf{u}_1 = (1, 0)$, ktorému odpovedá os kuželosečky s rovnicou $b^2x = 0$, čiže súradnicová os Oy . Podobne pre $\lambda_2 = \sigma a^2$ získame druhú os kuželosečky, ktorou je súradnicová os Ox . Pre $\sigma = 1$ máme elipsu, jej vrcholy sú body

$$(7.3) \quad A = (-a, 0), \quad B = (a, 0), \quad C = (0, -b), \quad D = (0, b).$$

Pre $\sigma = -1$ máme hyperbolu. Os Ox ju pretína v bodoch

$$(7.4) \quad A = (-a, 0), B = (a, 0),$$

os Oy ju nepretína.

Zhrnutie. Elipsa s rovnicou $x^2/a^2 + y^2/b^2 - 1 = 0$, $a > b > 0$, má práve dve osi a práve štyri vrcholy (7.3). Hyperbola s rovnicou $x^2/a^2 - y^2/b^2 - 1 = 0$, $a, b > 0$, má práve dve osi a práve dva vrcholy (7.4). Osami oboch kužeľosečiek sú súradnicové osi.

b) Pre parabolu s rovnicou $y^2 - 2px = 0$ má rovnica (7.2) tvar

$$\lambda^2 - \lambda = 0.$$

Rovnica má riešenia $\lambda_1 = 1$ a $\lambda_2 = 0$. Pre jediné nenulové riešenie $\lambda_1 = 1$ má sústava rovníc (7.1) podobu

$$\begin{array}{l} -u = 0 \\ 0 = 0 \end{array} \quad \left| \right.$$

Sústava má netriviálne riešenie $\mathbf{u}_1 = (0, 1)$, ktorému odpovedá os kužeľosečky s rovnicou $y = 0$, čiže súradnicová os Ox . Táto os pretína parabolu v jedinom bode $V = (0, 0)$.

Zhrnutie. Parabola s rovnicou $y^2 - 2px = 0$ má jedínú os (os Ox) a jediný vrchol (začiatok sústavy súradníc). $\square$

7.7 Príklad Nájdime osi kužeľosečky $4xy + 3y^2 + 16x + 12y - 36 = 0$.

1. Najprv riešime rovnicu (7.2), teda rovnicu $\lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0$. Rovnica má korene $\lambda_1 = 4$ a $\lambda_2 = -1$.

2. Pre koreň $\lambda_1 = 4$ zostavíme v súlade s vetou 7.3 sústavu rovníc

$$\begin{array}{l} -4u + 2v = 0 \\ 2u - v = 0 \end{array} \quad \left| \right.$$

Jej riešením je vektor $\mathbf{u}_1 = (1, 2)$.

Pre koreň $\lambda_2 = -1$ dostaneme sústavu rovníc

$$\begin{array}{l} u + 2v = 0 \\ 2u + 4v = 0 \end{array} \quad \left| \right.$$

Jej riešením je vektor $\mathbf{u}_2 = (-2, 1)$.

3. Osi kužeľosečky sú dve, sú to priemery $Q(\mathbf{u}_1)$: $4(x + 2y + 5) = 0$, $Q(\mathbf{u}_2)$: $2x - y - 10 = 0$. $\square$

7.8 Príklad Nájdime osi kužeľosečky $9x^2 - 24xy + 16y^2 - 20x + 110y - 50 = 0$.

1. Najprv riešime rovnicu (7.2), teda rovnicu $\lambda^2 - 25\lambda = 0$. Korene sú $\lambda_1 = 0$ a $\lambda_2 = 25$.

2. Podľa vety 7.3 koreň $\lambda_1 = 0$ nevedie k osi kužeľosečky. Pre koreň $\lambda_2 = 25$ máme sústavu

$$\begin{array}{l} -16u - 12v = 0 \\ -12u - 9v = 0 \end{array} \quad \left| \right.$$

Jej riešením je vektor $\mathbf{u} = (-3, 4)$.

3. Kužeľosečka má jedínú os, a to priemer $Q(\mathbf{u})$: $3x - 4y - 10 = 0$. $\square$

7.9 Lema a) Každá kužeľosečka má os.

b) Ak je os Ox karteziánskej sústavy súradníc osou kužeľosečky, tak $b = e = 0$ a $c \neq 0$, preto každú kužeľosečku môžeme vo vhodnej sústave súradníc vyjadriť rovnicou

$$ax^2 + y^2 + 2dx + f = 0.$$

Dôkaz. a) Podľa vety 7.3 stačí dokázať, že rovnica (7.2) má vždy nenulové riešenie. Jej diskriminant je $(a - c)^2 + 4b^2 \geq 0$. Ďalej spracujeme dva prípady.

Nech najprv $a = c$ a $b = 0$. Vtedy rovnica (7.2) má dvojnásobný koreň $\lambda_{1,2} = a$. Predpoklad $a = 0$ by znamenal, že všetky tri koeficienty a, b, c sú nulové, čo vzhľadom na podmienku v (1.1) nie je možné. Preto rovnica (7.2) má nenulové riešenie.

Pre $a \neq c$ alebo $b \neq 0$ má rovnica (7.2) dva rôzne korene, preto aspoň jeden z nich je nenulový.

b) Tvrdenie vyplýva z lemy 5.3. Rovnicu (5.3) sme predelili číslom c a nové koeficienty a/c , d/c , f/c , sme opäť označili ako a , d , f . $\square$

7.10 Úlohy

1 Nájdite všetky osi a) kružnice, b) imaginárnej kružnice.

2 Nájdite všetky osi a vrcholy singulárnych kužeľosečiek z príkladov 1.7 a 1.9 – 1.14.

3 Určte počet osí kužeľosečky v závislosti od jej typu. [Stredová kužeľosečka má práve dve osi a nestredová práve jednu.]

4 Je každá os súmernosti kužeľosečky jej osou? [Vo všeobecnosti nie, napr. dvojica rovnobežiek má nekonečne veľa osí súmernosti ale iba jednu os.]

5 Nájdite všetky osi a všetky vrcholy kužeľosečky

a) $3x^2 + 10xy + 3y^2 - 2x - 14y - 13 = 0$,

b) $25x^2 - 14xy + 25y^2 + 64x - 64y - 224 = 0$,

c) $9x^2 - 24xy + 16y^2 - 20x + 110y - 50 = 0$,

d) $7x^2 + 6xy - y^2 + 28x + 12y + 28 = 0$

e) $9x^2 + 12xy + 4y^2 - 24x - 16y + 3 = 0$,

f) $4x^2 + 12xy + 9y^2 - 4x - 6y + 1 = 0$,

[a) $o_1: x + y - 1 = 0$, $o_2: x - y - 3 = 0$, $A_{1,2} = (2 \pm \sqrt{2}/2, -1 \pm \sqrt{2}/2)$.

b) $o_1: x + y = 0$, $o_2: x - y + 2 = 0$, $A_{1,2} = (-2 \pm 3/2\sqrt{2}, 1 \mp 3/2\sqrt{2})$, $B_{1,2} = (-2 \pm 2\sqrt{2}, 1 \pm 2\sqrt{2})$.

c) $o: 3x - 4y - 10 = 0$, $A = (18/5, 1/5)$.

d) $o_1: 3x + y + 6 = 0$, $o_2: x - 3y + 2 = 0$, $A = (-2, 0)$

e) $o: 3x + 2y - 4 = 0$, vrcholy neexistujú.

f) $o: 2x + 3y - 1 = 0$, všetky body osi.]

8 Euklidovská a afinná klasifikácia kužeľosečiek

8.1 Veta Euklidovská klasifikácia kužeľosečiek. Pre každú kužeľosečku v euklidovskej rovine existuje taká karteziánska sústava súradníc, že rovnica kužeľosečky má práve jeden z nasledujúcich tvarov:

A. Regulárne kužeľosečky

Názov kužeľosečky

- | | | |
|----|---|----------------------------|
| 1. | $x^2 + y^2 - r^2 = 0 \quad (r > 0)$ | <i>kružnica</i> |
| 2. | $x^2 + y^2 + r^2 = 0 \quad (r > 0)$ | <i>imaginárna kružnica</i> |
| 3. | $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \quad (a > b > 0)$ | <i>elipsa</i> |
| 4. | $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0 \quad (a > b > 0)$ | <i>imaginárna elipsa</i> |
| 5. | $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \quad (a, b > 0)$ | <i>hyperbola</i> |
| 6. | $y^2 - 2px = 0 \quad (p > 0)$ | <i>parabola</i> |

B. Singulárne kužeľosečky hodnosti 2

- | | | |
|-----|----------------------------------|---|
| 7. | $x^2 - a^2y^2 = 0 \quad (a > 0)$ | <i>dvojica rôznobežiek</i> |
| 8. | $x^2 + a^2y^2 = 0 \quad (a > 0)$ | <i>dvojica imaginárnych rôznobežiek</i> |
| 9. | $y^2 - a^2 = 0 \quad (a > 0)$ | <i>dvojica (rôznych) rovnobežiek</i> |
| 10. | $y^2 + a^2 = 0 \quad (a > 0)$ | <i>dvojica (rôznych) imaginárnych rovnobežiek</i> |

C. Singulárne kužeľosečky hodnosti 1

- | | | |
|-----|-----------|----------------------------|
| 11. | $y^2 = 0$ | <i>dvojnásobná priamka</i> |
|-----|-----------|----------------------------|

Čísla a, b z prípadov A3, A4, A5 sa nazývajú *hlavná a vedľajšia polos elipsy* resp. *hyperboly*. Číslo p z prípadu A6 sa nazýva *parameter paraboly*.

Dôkaz. Vetu dokážeme iba pre regulárne kužeľosečky. Postupne budeme meniť sústavu súradníc, avšak kvôli jednoduchším zápisom súradnice znova označíme (x, y) a koeficienty rovnice kužeľosečky $A, \dots, F$. Upozorňujeme však, že vo všeobecnosti sa koeficienty rovnice kužeľosečky v novej sústave súradníc napriek rovnakému označeniu nerovnajú odpovedajúcim koeficientom rovnice v starej sústave súradníc.

V prvej etape zvolíme karteziánsku sústavu súradníc tak, aby os x bola osou kužeľosečky. Podľa lemy 7.9 taká sústava súradníc existuje a kužeľosečka má v nej rovnicu

$$(8.1) \quad Ax^2 + y^2 + 2Dx + F = 0.$$

Ak máme prípád stredovej kužeľosečky, podľa vety 5.5a leží jej stred na osi Ox , preto môžeme začiatok sústavy súradníc umiestniť do stredu kužeľosečky. Podľa lemy 3.3 dostaneme v rovnici (8.1) $D = 0, E = 0$, pričom koeficienty A, B, C sa nezmenia. Preto má rovnica tvar

$$(8.2) \quad Ax^2 + y^2 + F = 0.$$

Determinant matice kužeľosečky je AF , preto pre regulárne kužeľosečky je v (8.2) $A, F \neq 0$. Sú tieto možnosti:

- $A = 1$ a $F < 0$: Položíme $r = \sqrt{-F}$ a dostaneme rovnicu A.1.
- $A = 1$ a $F > 0$: Položíme $r = \sqrt{F}$ a dostaneme rovnicu A.2.
- $0 < A < 1$ a $F < 0$: Položíme $a = \sqrt{-F/A}, b = \sqrt{-F}$ a dostaneme rovnicu A.3.
- $A > 1$ a $F < 0$: Vymeníme medzi sebou súradnice x, y . Rovnica kužeľosečky získa tvar $x^2 + Ay^2 + F = 0$. Po predelení rovnice číslom A nastane prípad (iii), teda získame opäť rovnicu A3.

- (v) $0 < A < 1$ a $F > 0$: Položíme $a = \sqrt{(F/A)}$, $b = \sqrt{(F)}$ a dostaneme rovnicu A.4.
 (vi) $A > 1$ a $F > 0$: Postupujeme ako prípade (iv) a získame opäť rovnicu A.4.
 (vii) $A < 0$ a $F > 0$: Položíme $a = \sqrt{(-F/A)}$, $b = \sqrt{F}$ a dostaneme rovnicu A.5.
 (viii) $A < 0$ a $F < 0$: Postupujeme ako prípade (iv) a získame opäť rovnicu A5.
 Ostáva prípád nestredovej kuželosečky s rovnicou (8.1). Vtedy $0 = \delta = AC - B^2 = A$, preto $A = 0$. Rovnica kuželosečky má teda tvar

$$(8.3) \quad y^2 + 2Dx + F = 0.$$

Determinant matice kuželosečky je $-D^2$, preto podmienka regulárnosti je $D \neq 0$. Z nej vyplýva, že kuželosečka pretína os Ox , začiatok sústavy súradníc položíme do priesečníka. Vtedy zrejme $F = 0$ a opäť $D \neq 0$. Pre $D < 0$ položíme $p = D$ a získame rovnicu A.6. Pre $D > 0$ zmeníme orientáciu osi x a dostaneme predchádzajúci prípad, teda opäť rovnicu A.6. $\square$

8.2 Definícia Rovniciam z vety 8.1 hovoríme *kanonické rovnice kuželosečky* a odpovedajúcim karteziánskym sústavám súradníc hovoríme *kanonické sústavy súradníc kuželosečky*.

8.3 Poznámky 1. Pripomíname, že rovnica kuželosečky má kanonický tvar iba v kanonickej sústave súradníc, a tá má ku kuželosečke špecifickú polohu. Štandardné postupy hľadania kanonickej sústavy súradníc a kanonickej rovnice regulárnej kuželosečky ilustrujú príklady 8.5 a 8.6.

2. V sústave súradníc, ktorá má všeobecnú polohu vzhľadom ku kuželosečke, má analytické vyjadrenie kuželosečky všeobecný tvar (1.1).

3. Dve kuželosečky sú zhodné, ak majú rovnaké kanonické rovnice, teda práve vtedy, keď majú rovnaký typ z vety 8.1 a v rámci neho rovnaké číselné parametre. Napríklad dve elipsy sú zhodné práve vtedy, keď majú rovnaké polosi.

4. Dve reálne kuželosečky sú zhodné, ak v rovine existuje taká zhodnosť, ktorá množinu bodov prvej kuželosečky zobrazí na množinu bodov druhej.

8.5 Príklad Nájdime kanonickú rovnicu a kanonickú sústavu súradníc kuželosečky

$$4xy + 3y^2 + 16x + 12y - 36 = 0.$$

1. Stred kuželosečky: Je daný sústavou rovníc

$$\begin{array}{l} 2y + 8 = 0 \\ 2x + 3y + 6 = 0 \end{array}$$

teda je to bod $S = (3, -4)$. Kuželosečka je stredová.

2. V príklade 7.7 sme našli vektor $\mathbf{u}_1 = (1, 2)$ vyhovujúci sústave rovníc (7.1) pre koreň $\lambda_1 = 4$ rovnice (7.2). Odpovedajúci jednotkový vektor je $\mathbf{u} = (1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5})$.

3. Kanonická sústava súradníc: Nová sústava súradníc má začiatok $S = (3, -4)$ a súradnicové vektory $\mathbf{u} = (1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5})$ a $\mathbf{v} = (-2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5})$. (Vektor $\mathbf{v}$ sme získali otočením vektora $\mathbf{u}$ o $+90$ stupňov, teda transformáciou $(u, v) \rightarrow (-v, u)$.)

Transformačné rovnice medzi pôvodnou a kanonickou sústavou súradníc sú

$$(7.5) \quad \begin{array}{l} x = (x' - 2y')/\sqrt{5} + 3 \\ y = (2x' + y')/\sqrt{5} - 4 \end{array}$$

4. Rovnica kuželosečky v kanonickej sústave súradníc: Podľa lemy 3.3 je $d' = e' = 0$ a podľa lemy 5.3 je $b' = e' = 0$. Teda v zmenenej sústave súradníc má rovnica tvar

$$a'x'^2 + cy'^2 + f' = 0$$

Jej koeficienty určíme priamo dosadením transformačných rovníc do pôvodnej rovnice kuželosečky: $a' = 4$, $c' = -1$, $f' = -36$, teda kuželosečka má v novej sústave súradníc rovnicu

$$4x'^2 - y'^2 - 36 = 0.$$

5. Kanonická rovnica kužeľosečky vznikne normalizáciou poslednej rovnice – predelíme ju absolútnym členom:

$$x'^2/9 - y'^2/36 - 1 = 0.$$

Daná kužeľosečka je hyperbola s hlavnou polosou 3 a vedľajšou polosou 6. □

8.6 Príklad Nájdime kanonickú rovnicu a kanonickú sústavu súradníc kužeľosečky

$$9x^2 - 24xy + 16y^2 - 20x + 110y - 50 = 0.$$

1. Stred kužeľosečky: Je daný sústavou rovníc

$$\begin{array}{l} 9x - 12y - 10 = 0 \\ -12x + 16y + 55 = 0 \end{array}$$

Sústava nemá riešenie, preto stred kužeľosečky neexistuje. Kužeľosečka je nestredová.

2. Os kužeľosečky: V príklade 7.8 sme našli vektor $\mathbf{u}_1 = (-3, 4)$ vyhovujúci sústave rovníc (7.2) pre koreň $\lambda_2 = 25$ rovnice (7.2). Odpovedajúci jednotkový vektor je $\mathbf{u} = (-3/5, 4/5)$.

Jemu odpovedajúci priemer $Q(\mathbf{u})$ kužeľosečky je jej osou o : $3x - 4y - 10 = 0$. Na nej leží vrchol $V = (18/5, 1/5)$, ktorý sme vypočítali zo sústavy rovníc

$$\begin{array}{l} 9x^2 - 24xy + 16y^2 - 20x + 110y - 50 = 0 \\ 3x - 4y - 10 = 0 \end{array}$$

3. Kanonická sústava súradníc: Nová sústava súradníc má začiatok $V = (18/5, 1/5)$ a súradnicové vektory $\mathbf{v} = (4/5, 3/5)$ a $\mathbf{u} = (-3/5, 4/5)$. Uvedomme si, že vektor $\mathbf{u}$ je normálový vektor osi o , teda druhý súradnicový vektor!

Transformačné rovnice medzi pôvodnými a zmenenými súradnicami sú

$$\begin{array}{l} x = (4x' - 3y' + 18)/5 \\ y = (3x' + 4y' + 1)/5 \end{array}$$

4. Rovnica kužeľosečky v kanonickej sústave súradníc: Podľa lemy 5.3 je $b' = e' = 0$. Pretože začiatok sústavy súradníc je bodom kužeľosečky, $f' = 0$. V zmenenej sústave súradníc má rovnica teda tvar

$$a'x'^2 + c'y'^2 + 2d'x' = 0.$$

Jej koeficienty $a' = 25$, $c' = 0$, $d' = 25$ získame po dosadení transformačných rovníc do pôvodnej rovnice kužeľosečky, teda kužeľosečka má v novej sústave súradníc rovnicu

$$25y'^2 + 50x' = 0.$$

V kanonickej rovnici (veta 8.1 typA6) má byť koeficient pri neznámej x' záporný, preto ešte raz zmeníme sústavu súradníc. Vektor $\mathbf{v}$ nahradíme vektorom $-\mathbf{v}$, pričom kvôli jednoduchosti zápisu ponecháme predchádzajúce označenie súradníc (x', y') . V tejto sústave súradníc má kužeľosečka rovnicu

$$(7.6) \quad 25y'^2 - 50x' = 0.$$

Získali sme kanonickú sústavu súradníc. Transformačné rovnice medzi pôvodnou a kanonicou sústavou súradníc sú

$$\begin{array}{l} x = (-4x' - 3y' + 18)/5 \\ y = (-3x' + 4y' + 1)/5 \end{array}$$

5. Kanonická rovnica kužeľosečky vznikne normalizáciou rovnice (7.6), predelíme ju prvým koeficientom:

$$y'^2 - 2x' = 0.$$

Daná kužeľosečka je parabola s parametrom 1. □

8.7 Veta Afinná klasifikácia kužeľosečiek. Pre každú kužeľosečku v euklidovskej rovine existuje taká afinná sústava súradníc, že rovnica kužeľosečky má práve jeden z nasledujúcich tvarov:

A. Regulárne kuželosečky

1. $x^2 + y^2 - 1 = 0$
2. $x^2 + y^2 + 1 = 0$
3. $x^2 - y^2 - 1 = 0$
4. $y^2 - 2x = 0$

Názov kuželosečky

elipsa
imaginárna elipsa
hyperbola
parabola

B. Singulárne kuželosečky hodnoti 2

5. $x^2 - y^2 = 0$
6. $x^2 + y^2 = 0$
7. $y^2 - 1 = 0$
8. $y^2 + 1 = 0$

dvojica rôznobežiek
dvojica imaginárnych rôznobežiek
dvojica (rôznych) rovnobežiek
dvojica (rôznych) imaginárnych rovnobežiek

C. Singulárne kuželosečky hodnoti 1

9. $y^2 = 0$

dvojnásobná priamka

Dôkaz. Veta je jednoduchým dôsledkom euklidovskej klasifikácii kuželosečiek (veta 8.1), stačí vhodne zmeniť dĺžky vektorov kanonickej karteziánskej sústavy súradníc. Podrobne to kážeme na euklidovskom prípade A.3: V kanonickej karteziánskej sústave súradníc $O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ má elipsa rovnicu $x^2/a^2 + y^2/b^2 - 1 = 0$. V zmenenej afinnej sústave súradníc $O, a\mathbf{e}_1, b\mathbf{e}_2$ má kuželosečka rovnicu $x^2 + y^2 - 1 = 0$, čo je afinný prípad A.1. $\square$

8.8 Definícia Rovniciam z vety 8.7 hovoríme *kanonické rovnice afinnej kuželosečky* a odpovedajúcim afinným sústavám súradníc hovoríme *kanonické sústavy súradníc afinnej kuželosečky*. Alternatívne názvy sú *afinná kanonická rovnica kuželosečky* a *afinné kanonické sústavy súradníc kuželosečky*.

8.9 Poznámka Dve kuželosečky sú afinne ekvivalentné práve vtedy, ak majú rovnaké afinné kanonické rovnice, teda práve vtedy, keď majú rovnaký typ z vety 8.7. Napríklad každé dve elipsy vrátane kružníc sú afinne ekvivalentné. Dve reálne kuželosečky sú afinne ekvivalentné, ak v rovine existuje taká afinná transformácia, ktorá množinu bodov prvej kuželosečky zobrazí na množinu bodov druhej.

8.10 Poznámky 1. V euklidovskej rovine sme mali 11 typov kuželosečiek, v afinnej rovine je ich iba 9. Euklidovské kružnice a elipsy splývajú v afinnej rovine do jedného typu, rovnako euklidovské imaginárne kružnice a imaginárne elipsy. Ostatné typy kuželosečiek sa prechodom k afinnej geometrii nemenia.

2. Pri afinnom pohľade na kuželosečky sa strácajú všetky ich metrické invarianty. Napríklad všetky paraboly v afinnej rovine sú navzájom afinne ekvivalentné, pre ich afinný parameter platí $p = 1$. Rovnako všetky kružnice sú medzi sebou afinne ekvivalentné, každá má vo vhodnej afinnej sústave súradníc rovnicu $x^2 + y^2 - 1 = 0$.

3. Kuželosečka má spravidla viac afinných kanonických sústav súradníc ako euklidovských. Napríklad elipsa (nie kružnica!) má práve štyri euklidovské kanonické sústavy súradníc, ale afinných má nekonečne veľa, pozri úlohu 8.11.4.

8.11 Úlohy

1 Napíšte kanonické rovnice kuželosečiek

- a) $5x^2 + 4xy + 8y^2 - 32x + 56y + 80 = 0$ [$x'^2/9 + y'^2/4 - 1 = 0$]
- b) $6xy + 8y^2 - 12x - 26y + 11 = 0$ [$x'^2/9 - y'^2 - 1 = 0$]
- c) $x^2 + 2xy + y^2 + 3x + y = 0$ [$y'^2 - \sqrt{2}/2x' = 0$]
- d) $x^2 + 4xy + 4y^2 - 4x + 2y - 5 = 0$ [$y'^2 - 2\sqrt{5}/5x' = 0$]

2 Koľko kanonických karteziánskych sústav súradníc má euklidovská kuželosečka? [Elipsa a hyperbola 4, parabola 2, kružnica nekonečne veľa, atď.]

*3 Dokážte časť klasifikačnej vety 8.1 o singulárnych kužeľosečkách. [Návod: Postupujte ako v prípade regulárnych kužeľosečiek. V rovnici (8.2) vylúčte možnosť $A = 0$ a diskutujte prípady $A > 0$ a $F = 0$, $A < 0$ a $F = 0$. V rovnici (8.3) diskutujte prípady $D = 0$ a $F > 0$, $D = 0$ a $F < 0$.]

+4 a) Dokážte: Ak S je stred elipsy a A, B sú jej dva také body, že vektory $A - S, B - S$ určujú združené smery, tak $S, A - S, B - S$ je afinná kanonická sústava súradníc elipsy.

b) Sformulujte tvrdenia analogické k a) pre hyperbolu.

c) Sformulujte tvrdenia analogické k a) pre parabolu.

d) Sformulujte analogické tvrdenia analogické k a) pre dvojicu rôznobežiek.

e) Nájdite všetky afinné kanonické sústavy súradníc dvojice rovnobežiek.

[$O', \mathbf{e}, \mathbf{f}$, kde O' je ľubovoľný stred kužeľosečky, $\mathbf{e}$ je ľubovoľný nenulový smerový vektor oboch rovnobežiek a $\mathbf{f} = P - O'$, pričom P je ľubovoľný bod kužeľosečky.]

5 Zostavte rovnicu kužeľosečky so stredom $S = (2, 1)$, pre ktorú sú priamky $k: y - 2 = 0$, $l: x - y = 0$ dotyčnicami v koncových bodoch združených priemerov.

[$x^2 - 2xy + 2y^2 - 2x + 1 = 0$. Návod: Pomocou odpovedajúcich združených priemerov vypočítajte body dotyku priamok k, l .]

9 Ohniskové vlastnosti kužeľosečiek

V tejto kapitole uvedieme najmä klasické charakterizácie elipsy, hyperboly a paraboly pomocou ohnísk a riadiacich priamok. Elipsy a hyperboly spracujeme paralelne, pričom alternatívu pre hyperboly uvádzame v hranatých zátvorkách.

9.1 Definícia Uvažujme elipsu [hyperbolu] s kanonickou rovnicou $x^2/a^2 + \sigma y^2/b^2 - 1 = 0$. Pri tom pre elipsu platí $\sigma = 1$, $a > b > 0$ a pre hyperbolu $\sigma = -1$, $a, b > 0$. Číslo

$$e = \sqrt{a^2 - \sigma b^2}$$

je (lineárna) *excentricita*. Ohniská elipsy [hyperboly] sú body, ktoré v kanonickej sústave súradníc elipsy [hyperboly] majú súradnice

$$(9.1) \quad F_1 = (-e, 0) \quad \text{a} \quad F_2 = (e, 0).$$

Úsečky (niekedy priamky resp. polpriamky) MF_1 a MF_2 sa nazývajú *sprievodiče* bodu M elipsy [hyperboly].

9.2 Lema a) Pre každý bod elipsy $x^2/a^2 + y^2/b^2 - 1 = 0$, $a > b$ platí $|x| \leq a$, $|y| \leq b$, $a^2 \pm ex > 0$.
Pre každý bod hyperboly $x^2/a^2 - y^2/b^2 - 1 = 0$ platí $|x| \geq a$ a $a^2 \pm ex < 0$.

b) Pre každý bod elipsy [hyperboly] s kanonickou rovnicou $x^2/a^2 + \sigma y^2/b^2 - 1 = 0$ platí

$$\sigma(2a^2 - e^2 - x^2 - y^2) \geq 0.$$

Dôkaz. Pre každý bod $X = (x, y)$ elipsy platí $x^2/a^2 = 1 - y^2/b^2 \leq 1$, čiže $x^2 \leq a^2$. Rovnako $y^2 \leq b^2$, teda $|x| \leq a$, $|y| \leq b$. Preto $\sigma(2a^2 - e^2 - x^2 - y^2) = (a^2 - x^2) + (b^2 - y^2) \geq 0$. Nerovnosť $a^2 \pm ex > 0$ vznikne prenásobením nerovností $a > e$ a $a \geq |x|$, lebo ich pravé strany sú kladné.

Pri hyperbole sa postupuje veľmi podobne. $\square$

9.3 Veta Elipsa [hyperbola] s kanonickou rovnicou $x^2/a^2 + \sigma y^2/b^2 - 1 = 0$ je množina všetkých bodov v rovine, ktorých súčet vzdialeností [absolútna hodnota rozdielu vzdialeností] od ohnísk je $2a$. Teda

$$\begin{aligned} \text{elipsa} &= \{X \in E^2; |XF_1| + |XF_2| = 2a\}, \\ \text{hyperbola} &= \{X \in E^2; ||XF_1| - |XF_2|| = 2a\}. \end{aligned}$$

Jednotné vyjadrenie podmienky pre body elipsy a hyperboly je

$$(9.2) \quad \text{elipsa alebo hyperbola} = \{X \in E^2; ||XF_1| + \sigma|XF_2|| = 2a\},$$

Dôkaz. Rovnosť $||XF_1| + \sigma|XF_2|| = 2a$ je zrejme ekvivalentná s rovnosťou $(|XF_1| + \sigma|XF_2|)^2 = 4a^2$, ktorú s využitím vzťahov

$$(9.3) \quad |XF_i|^2 = x^2 + y^2 + e^2 \pm 2ex \geq 0, \quad i = 1, 2$$

ľahko upravíme do tvaru

$$(9.4) \quad \sqrt{(x^2 + y^2 + e^2 + 2ex)} \sqrt{(x^2 + y^2 + e^2 - 2ex)} = \sigma(2a^2 - (x^2 + y^2 + e^2)).$$

Po umocnení na druhú z rovnosti (9.4) vyplýva rovnosť

$$(9.5) \quad (x^2 + y^2 + e^2 + 2ex)(x^2 + y^2 + e^2 - 2ex) = (2a^2 - (x^2 + y^2 + e^2))^2.$$

Na základe nerovností v (9.3) a na základe lemy 9.2b sú rovnosti (9.4) a (9.5) navzájom ekvivalentné. Po jednoduchých úpravách postupne dostaneme s nimi ekvivalentné rovnosti

$$\begin{aligned} -e^2x^2 &= a^4 - a^2(x^2 + y^2 + e^2), \\ (a^2 - e^2)x^2 + a^2y^2 - a^2(a^2 - e^2) &= 0. \end{aligned}$$

Poslednú pomocou vzorca $a^2 - e^2 = \sigma b^2$ ľahko prepíšeme do tvaru $x^2/a^2 + \sigma y^2/b^2 - 1 = 0$. $\square$

9.4 Dôsledok (klasická definícia elipsy [hyperboly]) Dané sú body $F_1 \neq F_2$ a kladné reálne číslo a , pričom $2a > |F_1F_2|$ [$2a < |F_1F_2|$]. Množina všetkých bodov v rovine, ktorých súčet vzdialeností [absolútna hodnota rozdielu vzdialeností] od bodov F_1, F_2 je $2a$, je elipsa [hyperbola]. $\square$

9.5 Definícia Ohnisko paraboly resp. riadiaca priamka paraboly s kanonickou rovnicou $y^2 - 2px = 0$ je bod F resp. priamka f , pre ktoré v kanonickej sústave súradníc paraboly platí

$$(9.6) \quad F = (p/2, 0), \quad f: x + p/2 = 0.$$

Úsečky (niekedy priamky resp. polpriamky) MF_1 a MM' , kde M' je kolmý priemet bodu M do riadiacej priamky f , sa nazývajú *sprievodiče* bodu M paraboly.

9.6 Poznámka Riadiaca priamka paraboly je polára jej ohniska (úloha 9.20.7a).

9.7 Veta Parabola s kanonickou rovnicou $y^2 - 2px = 0$ je množina všetkých bodov roviny rovnako vzdialených od ohniska a od riadiacej priamky paraboly. Teda

$$\text{parabola} = \{X \in E^2; |XF| = |Xf|\}.$$

Dôkaz. ľubovoľný bod $X = (x, y)$ roviny je bodom uvažovanej množiny bodov práve vtedy, keď $|XF|^2 = |Xf|^2$, teda práve vtedy, keď $(x - p/2)^2 + y^2 = (x + p/2)^2$. Po jednoduchej úprave dostaneme ekvivalentnú podmienku $y^2 - 2px = 0$. $\square$

9.8 Dôsledok (klasická definícia paraboly) Daný je bod F a priamka f , pričom $F \notin f$. Množina všetkých bodov v rovine rovnako vzdialených od bodu F a od priamky f je parabola. $\square$

V nasledujúcej vete ukážeme, že aj elipsu a hyperbolu možno charakterizovať pomocou ohniska a riadiacej priamky podobne ako parabolu. Na to potrebujeme ešte jednu definíciu.

9.9 Definícia Číslo $\varepsilon = e/a$ je *numerická* (alebo tiež *číselná*) *excentricita* elipsy [hyperboly]. Priamky

$$(9.7) \quad f_{1,2}: x \pm a/\varepsilon = 0$$

sú *riadiace priamky* elipsy [hyperboly]. Každá z nich odpovedá ohnisku $F_{1,2}$ s rovnakým indexom.

9.10 Poznámka Riadiaca priamka elipsy [hyperboly] je polára odpovedajúceho ohniska (úloha 9.20.8).

9.11 Veta Elipsa [hyperbola] s kanonickou rovnicou $x^2/a^2 + \sigma y^2/b^2 - 1 = 0$ je množina všetkých bodov roviny, pre ktoré sa pomer vzdialenosti od ohniska k vzdialenosti od odpovedajúcej riadiacej priamky rovná číselnej excentricite kuželosečky, čiže

$$\text{elipsa [hyperbola]} = \{X \in E^2; |XF_i| / |Xf_i| = \varepsilon = e/a\}.$$

Dôkaz. Nech $X = (x, y)$ je ľubovoľný bod roviny. Máme dokázať, že obe podmienky $|X, F_i| / |X, f_i| = \varepsilon$, $i = 1, 2$, sú ekvivalentné s rovnicou $x^2/a^2 + \sigma y^2/b^2 - 1 = 0$. Zrejme stačí dokázať ekvivalenciu kanonickej rovnice elipsy [hyperboly] s rovnosťou

$$(9.8) \quad |XF_i|^2 = \varepsilon^2 |Xf_i|^2.$$

Je zrejmé, že $|XF_i|^2 = (x \pm e)^2 + y^2$ a $|Xf_i|^2 = (x \pm a/\varepsilon)^2$, preto je rovnosť (9.8) ekvivalentná s

$$(x \pm e)^2 + y^2 = \varepsilon^2 (x \pm a/\varepsilon)^2,$$

čo s využitím vzťahu $\varepsilon = e/a$ upravíme na tvar

$$(a^2 - e^2)x^2 + a^2y^2 + a^2(e^2 - a^2) = 0.$$

Nakoniec využijeme rovnosť $e^2 - a^2 = \sigma b^2$. $\square$

9.12 Dôsledok Dané je kladné číslo ε , bod F a priamka f , pričom $F \notin f$. Množina všetkých bodov roviny, pre ktoré sa pomer ich vzdialenosti od bodu F k ich vzdialenosti od priamky f rovná číslu ε , je

elipsa	pre $\varepsilon < 1$,
parabola	pre $\varepsilon = 1$,
hyperbola	pre $\varepsilon > 1$.

$\square$

9.13 Veta V každom bode M elipsy [hyperboly] je normála [dotyčnica] osou uhla F_1MF_2 .

Dôkaz urobíme iba pre elipsu Q , pre hyperbolu ho prenechávame čitateľovi (úloha 9.20.2). Stačí dokázať, že pre ľubovoľný bod $M = (m, n)$ elipsy $b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$ platí

$$(9.9) \quad \cos \angle \mathbf{n}, F_1 - M = \cos \angle \mathbf{n}, F_2 - M,$$

kde $\mathbf{n} = (b^2m, a^2n)$ je smerový vektor normály elipsy čiže normálový vektor dotyčnice v bode M . Na základe súradníc ohnísk (9.1) je dokazované tvrdenie ekvivalentné s rovnosťou

$$(-b^2em - b^2m^2 - a^2n^2)\sqrt{(e^2 + m^2 + n^2 - 2em)} = (b^2em - b^2m^2 - a^2n^2)\sqrt{(e^2 + m^2 + n^2 + 2em)}.$$

Pretože bod M leží na uvažovanej elipse, platí $b^2m^2 + a^2n^2 = a^2b^2$. Predchádzajúcu rovnosť teda môžeme prepísať do podoby

$$(9.10) \quad (a^2 + em)\sqrt{(e^2 + m^2 + n^2 - 2em)} = (a^2 - em)\sqrt{(e^2 + m^2 + n^2 + 2em)}.$$

Z (9.3) a z lemy 9.2a dostávame, že rovnosť (9.10) je ekvivalentná s rovnosťou

$$(9.11) \quad (a^4 + e^2m^2 + 2a^2em)(e^2 + m^2 + n^2 - 2em) = (a^4 + e^2m^2 - 2a^2em)(e^2 + m^2 + n^2 + 2em).$$

Po označení $A = a^4 + e^2m^2$, $B = 2a^2em$, $C = e^2 + m^2 + n^2$, $D = 2em$ má rovnosť (9.11) tvar $(A + B)(C - D) = (A - B)(C + D)$, čiže $AD = BC$. Po dosadení za A, B, C, D teda máme

$$2em(a^4 + e^2m^2) = 2a^2em(e^2 + m^2 + n^2).$$

Nakoniec využijeme vzorec $a^2 - e^2 = b^2$ a dostaneme $b^2m^2 + a^2n^2 - a^2b^2 = 0$, čo je pravdivý výrok, lebo $M \in Q$. Preto je pravdivý aj dokazovaný výrok (9.9). $\square$

9.14 Dôsledok Lúč vyslaný z jedného ohniska elipsy po odraze od elipsy prechádza druhým ohniskom. $\square$

9.15 Poznámka Veta 9.13 sa obvykle formuluje takto: Dotyčnica elipsy [hyperboly] rozpoľuje vonkajší [vnútorný] uhol sprievodičov bodu dotyku.

9.16 Veta Pre parabolu s ohniskom F a vrcholom V je normála v bode M osou uhla FMA , kde MA je polpriamka súhlasne rovnobežná s polpriamkou VF . (Inými slovami $A = M + (F - V)$.)

Dôkaz. Stačí dokázať, že pre bod $M = (m, n)$ paraboly Q s rovnicou $y^2 - 2px = 0$ platí

$$(9.12) \quad \cos \angle \mathbf{n}, F - M = \cos \angle \mathbf{n}, \mathbf{e}_1,$$

kde $\mathbf{n} = (b^2m, a^2n)$ je smerový vektor normály v bode M a $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$. Na základe hodnôt súradníc ohniska paraboly, pozri (9.6), je dokazované tvrdenie ekvivalentné s rovnosťou

$$-p^2 + 2pm - 2n^2 = -p(2m + p).$$

Po jednoduchšej úprave dostaneme ekvivalentnú rovnosť $2(n^2 - 2pm) = 0$, a tá platí, lebo $M \in Q$. Preto platí aj dokazovaná rovnosť (9.12). $\square$

9.17 Poznámka Veta 9.16 sa obvykle formuluje takto: Dotyčnica paraboly rozpoľuje vnútorný uhol sprievodičov bodu dotyku.

9.18 Dôsledok Všetky lúče vyslané z ohniska paraboly sú po odraze od paraboly súhlasne rovnobežné s osou paraboly. Obrátene, lúče nesúhlasne rovnobežné s osou paraboly po odraze od paraboly prechádzajú jej ohniskom. $\square$

Vlastnosť paraboly z dôsledku 9.18 má široké uplatnenie v technike napr. v reflektoroch a vo vysielacích aj prijímacích anténach. Podľa tradície Archimedes okolo r. 200 pr. n. l. pri obrane Syrakúz na diaľku spálil rímske lode pomocou veľkého zrkadla parabolického tvaru poskladaného z vyleštených kovových štítov.

9.19 Poznámka a) Niekedy, napríklad pri vykresľovaní kužeľosečky na počítači, je výhodné použiť jej parametrické vyjadrenie. Štandardne sa používajú tieto parametrické vyjadrenia kužeľosečiek:

Kružnica s rovnicou	$x^2 + y^2 - r^2 = 0$	$P(t) = (r \cos t, r \sin t), t \in \langle 0, 2\pi \rangle$
Elipsa s rovnicou	$x^2/a^2 + y^2/b^2 - 1 = 0$	$P(t) = (a \cos t, b \sin t), t \in \langle 0, 2\pi \rangle$
Hyperbola s rovnicou	$x^2/a^2 - y^2/b^2 - 1 = 0$	$P(t) = (\pm a \cosh t, b \sinh t), t \in (-\infty, \infty)$

Parabola s rovnicou $y^2 - 2px = 0$ $P(t) = (t^2/(2p), t), t \in (-\infty, \infty)$

b) V parametrickom vyjadrení hyperboly sa vyskytli dve menej známe funkcie

hyperbolický kosínus: $\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}),$

hyperbolický sínus: $\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}).$

Lahko sa možno presvedčiť, že

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1, \quad \cosh' x = \sinh x, \quad \sinh' x = \cosh x.$$

Varovanie: Funkcie $\sinh x$ a $\cosh x$ nie sú periodické!

Inverzná funkcia k hyperbolickému sínusu sa nazýva „argument hyperbolického sínusu“, skr. Arsinh. Na rozdiel od známeho $y = \arcsin x$ nepredstavuje novú elementárnu funkciu, lebo

$$\sinh^{-1} x = \operatorname{Arsinh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}).$$

9.20 Úlohy

1 Prúžkové konštrukcie bodov elipsy a) Na súradnicových osiach Ox, Oy karteziánskej sústavy súradníc ležia body M, N tak, že $|MN| = a + b, a > b > 0$. Dokážte, že bod X úsečky MN , pre ktorý $|MX| = b$, leží na elipse s rovnicou $x^2/a^2 + y^2/b^2 - 1 = 0$.

[Návod: $X = a/(a+b)M + b/(a+b)N$, pričom $M = (m, 0), N = (0, n), m^2 + n^2 = |MN| = (a + b)^2$.]

b) Na úsečke MX je daný bod N tak, že $|MN| = a, |NX| = b, a > b > 0$. Body M, N ležia na súradnicových osiach Ox, Oy karteziánskej sústavy súradníc. Dokážte, že bod X leží na elipse s rovnicou $x^2/a^2 + y^2/b^2 - 1 = 0$.

[Návod: $X = -a/bM + (a+b)/bN$, pričom $M = (m, 0), N = (0, n), m^2 + n^2 = |MN| = a^2$.]

2 Dokážte vetu 9.13 pre hyperbolu.

3 Dokážte, že: a) Bod súmerný s jedným ohniskom podľa dotýčnice elipsy [hyperboly] leží na kružnici so stredom v druhom ohnisku a s polomerom $2a$.

b) Kolmý priemet jedného ohniska do dotýčnice leží na kružnici so stredom v strede kužeľosečky a s polomerom a . [Návod: Veta 9.13.]

4 a) Dokážte, že bod súmerný s ohniskom paraboly podľa dotýčnice leží na radiacej priamke.

b) Dokážte, že kolmý priemet ohniska paraboly do ľubovoľnej dotýčnice leží na dotýčnici vo vrchole.

⁺**5** Nájdite množinu bodov, z ktorých možno viesť dve na seba kolmé dotýčnice paraboly.

[Návod: Veta 9.16, úloha 9.6c.]

⁺**6** Presvedčte sa, že parameter paraboly (definícia 9.5) a elipsy resp. hyperboly (úloha 1.10) je polovica dĺžky tetivy prechádzajúcej ohniskom kužeľosečky kolmo na (hlavnú) os.

[Návod: Počítajte priesečníky priamky $x - e = 0$ s kužeľosečkou $x^2/a^2 + \sigma y^2/b^2 - 1 = 0$.]

7 Priesečník osi paraboly s jej radiacou priamkou označme H . Dokážte:

a) Radiaca priamka paraboly je polárou jej ohniska.

b) Polára bodu H prechádza ohniskom kolmo na os paraboly.

c) Dotýčnice paraboly prechádzajúce bodom H sú na seba kolmé.

d) Dotýčnice paraboly prechádzajúce bodom H obsahujú priesečníky paraboly s kolmicou na os vztýčenou v ohnisku.

8 Dokážte: a) Radiaca priamka elipsy je polárou odpovedajúceho ohniska.

b) Radiaca priamka hyperboly je polárou odpovedajúceho ohniska.

9 Presvedčte sa, že súradnice bodov $P(t)$ z poznámky 9.19 vyhovujú rovnici príslušnej kužeľosečky.

10 a) Uvedomte si, že pre parameter t bodu $P(t) = (r \cos t, r \sin t)$ z kružnice $x^2 + y^2 - r^2 = 0$ platí: t je orientovaný uhol vektorov $\mathbf{e}_1, P(t) - O$. Načrtnite odpovedajúci obrázok.

b) Dokážte, že pre parameter t bodu $P(t) = (a \cos t, b \sin t)$ z elipsy $x^2/a^2 + y^2/b^2 - 1 = 0$ platí: t je orientovaný uhol vektorov $\mathbf{e}_1, Q(t) - O$, kde $Q(t) = (a \cos t, a \sin t)$ je bod kružnice $x^2 + y^2 -$

$a^2 = 0$. Načrtnite odpovedajúci obrázok. [Návod: Pozri úlohu 1.24.3. Uvedomte si, že body $P(t)$, $Q(t)$ ležia na rovnobežke s osou Oy .]

c) Presvedčte sa, že body $P(t) = (a \cos t, b \sin t)$ a $P(t + \pi/2)$ určujú združené priemery elipsy $x^2/a^2 + y^2/b^2 - 1 = 0$. Načrtnite odpovedajúci obrázok vrátane bodov $Q(t) = (a \cos t, a \sin t)$ a $Q(t + \pi/2)$ z úlohy b).

⁺d) Uvedomte si, že škálovanie $x' = x$, $y' = (b/a)y$ je afinná transformácia roviny a že každá afinná transformácia zobrazuje združené priemery kužeľosečky do združených priemerov obrazu kužeľosečky. Znova sa pozrite na úlohu c).

⁺**11** Presvedčte sa, že dotyčnica elipsy, hyperboly a paraboly ako parametricky zadaných kriviek (poznámka 9.19) je totožná s dotyčnicou z definície 2.6.

10 Plochy druhého stupňa

V tejto a v nasledujúcich kapitolách pracujeme v euklidovskom priestore E^3 , v ktorom je daná afinná resp. karteziánska sústava súradníc. Súradnice bodu $z E^3$ resp. vektora podľa okolností zapisujeme v tvare (x_1, x_2, x_3) alebo (x, y, z) .

10.1 Definícia *Plocha druhého stupňa* Q alebo tiež *kvadratická plocha* resp. krátko *kvadrika* je určená vzhľadom na aktuálnu afinnú alebo karteziánsku sústavu súradníc kvadratickou rovnicou s reálnymi koeficientmi

$$(10.1) \quad a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 + 2b_1x_1 + 2b_2x_2 + 2b_3x_3 + c = 0, \quad (a_{11}, \dots, a_{33}) \neq (0, \dots, 0),$$

stručne

$$(10.2) \quad \sum_{i,j=1}^3 a_{ij}x_ix_j + \sum_{i=1}^3 2b_ix_i + c = 0, \quad a_{ji} = a_{ij} \text{ pre všetky } i, j = 1, 2, 3,$$

maticovo

$$(10.3) \quad \mathbf{X}^{\sim T} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{X}^{\sim} = 0, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & b_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 & c \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}^{\sim} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(Všimnite si, že matica $\mathbf{Q}$ je symetrická a jej podmatica $(a_{ij})_{i,j=1,2,3}$ je nenulová.)

Dve rovnice resp. dve matice určujú v rovnakej sústave súradníc rovnakú kvadriku, ak jedna z rovníc je násobkom druhej nenulovou konštantou.

Matice $\mathbf{Q}$ a $\mathbf{Q}'$ určujú v rôznych afinných sústavách súradníc rovnakú kvadriku, ak

$$\mathbf{Q}' = k\mathbf{F}^{\sim T} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{F}^{\sim},$$

kde $\mathbf{F}^{\sim}$ je transformačná matica medzi sústavami súradníc v E^3 a $k \neq 0$.

Bod kvadriky je každý bod euklidovského priestoru E^3 , ktorého súradnice vyhovujú rovnici kvadriky.

Definícia kvadriky v E^3 sa priamočiaro zovšeobecni na definíciu nadkvadriky v n -rozmernom euklidovskom priestore E^n . Pre $n = 2$ spätne získame kužeľosečku.

10.2 Príklady a) *Gul'ová plocha* so stredom $S = (x_0, y_0, z_0)$ a s polomerom $r > 0$ je v karteziánskej sústave súradníc vyjadrená rovnicou $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 - r^2 = 0$, čiže rovnicou

$$(10.4) \quad x^2 + y^2 + z^2 - 2x_0x - 2y_0y - 2z_0z + (x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - r^2) = 0.$$

(V afinnej sústave súradníc táto rovnica vo všeobecnosti vyjadruje *elipsoid* so stredom S .)

b) *Dvojica rovín* je vyjadrená rovnicou $(ax + by + cz + d)(a'x + b'y + c'z + d') = 0$. Jej bodmi sú práve body rovín s rovnicami $ax + by + cz + d = 0$ a $a'x + b'y + c'z + d' = 0$.

c) *Valcová plocha* je vo vhodnej afinnej sústave súradníc určená rovnicou

$$(10.5) \quad ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0, \quad (a, b, c) \neq (0, 0, 0).$$

Jej bodmi sú práve všetky body všetkých priamok rovnobežných s osou Oz , ktoré rovinu Oxy pretínajú v bodoch kužeľosečky s rovnicou (10.5). Spomínané priamky sú *povrchové priamky* tej valcovej plochy. Ak je tá kužeľosečka kružnica a ak je os Oz kolmá na rovinu Oxy , vzniká *rotačná valcová plocha*.

d) *Kužeľová plocha* je vo vhodnej afinnej sústave súradníc určená rovnicou

$$(10.6) \quad a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 = 0.$$

Kužeľová plocha obsahuje s každým bodom $X = (x_1, x_2, x_3)$ aj bod $X' = (tx_1, tx_2, tx_3)$ pre všetky $t \in \mathbf{R}$. Jej body teda vyplňajú priamky, ktoré všetky prechádzajú začiatkom sústavy súradníc O ,

čo je *vrchol kužeľovej plochy* s rovnicou (10.6). Spomínané priamky sú *povrchové priamky* kužeľovej plochy. $\square$

10.3 Rovnako ako kužeľosečky delíme kvadriky na *regulárne* a *singulárne* podľa toho, či matica rovnice kvadriky je regulárna alebo singulárna, teda či jej determinant je nenulový alebo nulový.

Príkladom regulárnej kvadriky je guľová plocha. Dvojica rovín, valcová plocha a kužeľová plocha sú singulárne kvadriky.

10.4 Rovnako ako pri kužeľosečkách aj pri kvadrikách hovoríme o reálnych a imaginárnych kvadratických plochách. Imaginárne sú tie, ktorých množina bodov je relatívne malá, pozostáva z priamky, jedného bodu alebo prázdnej množiny. Príklady:

a) Rovnica $x^2 + y^2 = 0$ vyjadruje priamku, os Oz . Kvadrika je *dvojica imaginárnych rôznobežných rovín* $x - iy = 0$ a $x + iy = 0$.

b) Rovnica $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ vyjadruje jediný bod $O = (0, 0, 0)$. Kvadrika je *imaginárny kužeľ*.

c) Rovnica $x^2 + 1 = 0$ vyjadruje prázdnu množinu. Kvadrika je *dvojica imaginárnych rovnobežných rovín* $x - i = 0$ a $x + i = 0$.

d) Rovnica $x^2 + y^2 + z^2 + r^2 = 0$ vyjadruje v karteziánskej sústave súradníc prázdnu množinu. Kvadrika je *imaginárna guľová plocha* so stredom v začiatku sústavy súradníc.

Kvadrika z príkladov a), b), c) sú singulárna, v príklade d) je regulárna.

10.5 Dá sa dokázať, že nasledujúci zoznam obsahuje všetky typy regulárnych reálnych kvadrik. Kvadriky sú vyjadrené ich kanonickými rovnicami vzhľadom na kanonickú karteziánsku sústavu súradníc. V rovniciach vystupujúce konštanty a, b, c, r sú kladné reálne čísla.

(E)	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$	<i>elipsoid</i>
(1DH)	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$	<i>jednodielný hyperboloid</i>
(2DH)	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0$	<i>dvojdielný hyperboloid</i>
(EP)	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 2z = 0$	<i>eliptický paraboloid</i>
(HP)	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 2z = 0$	<i>hyperbolický paraboloid</i>

Dôležitým špeciálnym prípadom elipsoidu pre $a = b = c = r$ je

(GP)	$x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0$	<i>guľová plocha</i>
------	-----------------------------	----------------------

10.6 Rotačné regulárne kvadriky vznikajú rotáciou kružnice, elipsy, hyperboly alebo paraboly okolo jednej jej osi. Štandardne leží kužeľosečka v rovine Oxz karteziánskej sústavy súradníc a os rotácie je Oz . Takto vznikne *guľová plocha* (G), *rotačný elipsoid* (RE), *rotačný jednodielný hyperboloid* (R1DH), *rotačný dvojdielný hyperboloid* (R2DH) a *rotačný eliptický paraboloid* (REP). Pre koeficienty v ich kanonických rovniciach platí $a = b$.

Rotačný elipsoid je *sploštený* alebo *predĺžený* podľa toho, či $a = b > c$ (zemeguľa) alebo $a = b < c$ (ragbyová lopta). Pri $a = b = c$ sa rotačný elipsoid mení na guľovú plochu.

10.7 Rotačné singulárne kvadriky vznikajú rotáciou dvojice priamok okolo jej osi. Z dvojice rovnobežných priamok vznikne *rotačná valcová plocha* (RVP), z dvojice rôznobežných priamok *rotačná kužeľová plocha* (RKP). Štandardne leží rotujúca dvojica priamok v rovine Oxz karteziánskej sústavy súradníc a os rotácie je Oz , pričom stred dvojice rôznobežných priamok je začiatok O . Odpovedajúce kanonické rovnice sú

$$(RVP) \quad x^2 + y^2 - r^2 = 0$$

rotačná valcová plocha

$$(RKP) \quad x^2 + y^2 - r^2 z^2 = 0$$

rotačná kužeľová plocha

10.8 Pri skúmaní afinných vlastností regulárnych kvadrík možno použiť jednoduchšie tvary ich rovníc z odseku 10.5 s koeficientmi $a = b = c = r = 1$ (úloha 10.14.1).

10.9 Spoločné body priamky $M\mathbf{u}$ s kvadratickou plochou určujeme podobne ako pre kužeľosečky, pozri odseky 2.1 – 2.3. Základom je opäť rovnica najviac druhého stupňa $At^2 + 2Bt + C = 0$ pre neznámy parameter t z parametrického vyjadrenia priamky $M\mathbf{u}$.

10.10 Na rozdiel od kužeľosečiek, kde priamky môžu ležať iba na singulárnych kužeľosečkách (úloha 2.12.4b), regulárne kvadriky môžu obsahovať *povrchové priamky*. Vtedy ide o *priamkové kvadriky*, ktorými sú práve jednodielne hyperboloidy a hyperbolické paraboloidy.

10.11 Veta Každým bodom jednodielneho hyperboloidu alebo hyperbolického paraboloidu prechádzajú práve dve povrchové priamky. Ostatné regulárne kvadriky priamky neobsahujú.

Dôkaz vykonáme iba pre jednodielny hyperboloid Q , hyperbolický paraboloid prenecháme čitateľovi (úloha 10.14.2). Prechodom k vhodnej afinnej sústave súradníc môžeme rovnicu (1DH) z odseku 10.5 zjednodušiť do tvaru $x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0$.

Pre ľubovoľný bod $M = (m, n, p)$ hyperboloidu Q uvažujme vektory

$$\mathbf{u}_1 = (pm + n, pn - m, m^2 + n^2), \quad \mathbf{u}_2 = (pm - n, pn + m, m^2 + n^2).$$

Posledná súradnica vektorov $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ je nenulová, lebo $m^2 + n^2 = p^2 + 1 \neq 0$ kvôli rovnici (1DH). Preto lineárna závislosť vektorov $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ by implikovala $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2$. Vtedy ale $m = n = 0$, čiže $p^2 + 1 = 0$, čo je spor. Dosadením do rovnice (1DH) sa ľahko presvedčíme, že súradnice všetkých bodov priamok $M\mathbf{u}_1, M\mathbf{u}_2$ vyhovujú rovnici $x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0$. $\square$

10.12 Mnohé vlastnosti kužeľosečiek sa bez problémov dajú preniesť aj na kvadriky, napríklad: a) Definuje sa stred a singulárny bod kvadriky (odseky 3.1, 3.6) a dokáže sa, že kvadrika je súmerná podľa svojho stredu (veta 3.4). Definujú sa stredové a nestredové kvadriky a sformuluje a dokáže sa ich analytická charakteristika (veta 3.5). Opíšu sa množiny tvorené stredmi nestredových kvadrík (príklad 3.2.4).

b) Definuje sa polára bodu vzhľadom na kvadriku a zistí sa, kedy je rovinou (odseky 4.1, 4.2). Skúma sa symetria polarít v E^3 (veta 4.6).

c) Dotyková rovina v bode regulárnej kvadriky sa dá pohodlne definovať ako polára bodu dotyku (veta 4.3). Nový výsledok o kvadríkach je: Dotykové roviny priamkových regulárnych kvadrík obsahujú obidve povrchové priamky idúce bodom dotyku. Pre ostatné regulárne kvadriky má dotyková rovina s kvadrikou spoločný iba bod dotyku.

d) Definuje sa polára vektora a smeru vzhľadom na kvadriku a skúma sa, kedy je rovinou (odsek 5.1). To vedie k asymptotickým smerom kvadriky. Skúma sa šikmá súmernosť bodov kvadriky podľa polár neasymptotických smerov (veta 5.4).

10.13 Veta (o slove „kužeľosečka“) Rovina, ktorá neprechádza vrcholom rotačnej kužeľovej plochy, pretína kužeľovú plochu v elipse (vrátane kružnice), v parabole alebo v hyperbole podľa toho, či s ňou rovnobežná rovina prechádzajúca vrcholom kužeľovej plochy obsahuje práve 0, práve 1 alebo práve 2 povrchové priamky kužeľovej plochy.

Dôkaz. Uvažujme rotačnú kužeľovú plochu K s rovnicou $x^2 + y^2 - r^2 z^2 = 0$ a rovinu ρ , ktorá neprechádza vrcholom $O = (0, 0, 0)$. Po prípadnom pootočení sústavy súradníc okolo os Oz môžeme dosiahnuť, že rovina ρ je rovnobežná s osou Oy a že pretína povrchovú priamku $O\mathbf{a}$ kužeľovej plochy K so smerovým vektorom $\mathbf{a} = (r, 0, 1)$ ležiacu v rovine Oxz . Priesečníkom je bod $M = (rm, 0, m)$, pričom $m > 0$, (ak $m \leq 0$, zmeníme orientáciu osi Oz). Rovina ρ je teda určená bodom $M = (rm, 0, m)$, $m > 0$ a ortonormálnymi vektormi $\mathbf{b} = (\alpha, 0, \beta)$, $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ a

$\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)$. Môžeme tiež predpokladať, že pre vektor $\mathbf{b}$ platí $r\beta - \alpha > 0$, lebo v rovine Oxz má priamka Oa rovnicu $x - ry = 0$ a vektor $\mathbf{b}$ nie je s ňou rovnobežný.

Rovinu ρ vyjadríme parametricky

$$(10.7) \quad x = rm + \alpha u, \quad y = v, \quad z = m + \beta u.$$

Pripomeňme, že parametre (u, v) bodu $X \in \rho$ sú jeho súradnice vzhľadom na karteziánsku sústavu súradníc $M, \mathbf{b}, \mathbf{e}_2$ roviny ρ , pričom v priestore má bod X súradnice (x, y, z) .

Prienik roviny ρ s kužeľovou plochou K je v sústave súradníc roviny vyjadrený rovnicou

$$(10.8) \quad v^2 = 2pu + qu^2,$$

kde $p = rm(r\beta - \alpha)$, $q = r^2\beta^2 - \alpha^2$. Vzhľadom na nerovnosti $m > 0$ a $r\beta - \alpha > 0$ je číslo p kladné. Pre $q = 0$ je zrejme rezom $\rho \cap K$ parabola s rovnicou $v^2 = 2pu$. Podľa úlohy 1.24.10 je pre q záporné rezom elipsa a pre q kladné hyperbola.

Parametrické rovnice roviny ρ' idúcej vrcholom O kužeľovej plochy K rovnobežne s rovinou ρ vzniknú z rovníc (10.7) pre $m = 0$. Rovina ρ' pretína kužeľ K v povrchových priamkach, ktorých smerové vektory určuje rovnica $v^2 = qu^2$, ktorá vznikne z rovnice (10.8) pre $m = 0$, teda pre $p = 0$. Preto počet priamok, ktoré tvoria prienik $\rho' \cap K$, je práve 0 resp. práve 1 resp. práve 2 podľa toho, či q je záporné resp. nulové resp. kladné, teda podľa toho, či rezom $\rho \cap K$ je elipsa resp. parabola resp. hyperbola. $\square$

10.14 Úlohy

1 Dokážte tvrdenie z odseku 10.8. [Návod: Škálovanie, teda zmena mierky na osiach, čiže transformácia súradníc tvaru $x_1 = k_1 x'_1$, $x_2 = k_2 x'_2$, $x_3 = k_3 x'_3$, $k_1, k_2, k_3 \neq 0$.]

2 a) Dokážte vetu 10.11 pre hyperbolický paraboloid $x^2 - y^2 - 2z = 0$. [Návod: Pre každý bod paraboloidu hľadajte taký nenulový vektor $\mathbf{u}$, že všetky koeficienty rovnice pre spoločné body priamky $M\mathbf{u}$ s paraboloidom sú nulové.]

[†]b) Nech $A = (-1, 0, \frac{1}{2})$, $B = (0, -1, -\frac{1}{2})$, $C = (1, 0, \frac{1}{2})$, $D = (0, 1, -\frac{1}{2})$, $K_t = A + t(B - A)$, $L_t = D + t(C - D)$. Dokážte, že všetky $t, s \in \mathbf{R}$ bod $P_{t,s} = K_t + s(L_t - K_t)$ leží na hyperbolickom paraboloidu $x^2 - y^2 - 2z = 0$. (Pre t, s z intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ body $P_{t,s}$ tvoria tzv. priestorovú štvoruholníkovú záplatu.)

[†]c) Dokážte, že pre ľubovoľné nekomplanárne body A, B, C, D existuje v E^3 taká afinná sústava súradníc, v ktorej body majú súradnice ako v časti b).

3 Dokážte, že rez kvadriky (10.1) rovinou $M\mathbf{u}\mathbf{v}$, pričom $M = (m_1, m_2, m_3)$, $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$, je kužeľosečka. [Návod: Dosadíte z parametrických rovníc roviny do rovnice kvadriky. Uvedomte si, že parametre bodu roviny $M\mathbf{u}\mathbf{v}$ sú jeho súradnice v afinnej sústave súradníc $M, \mathbf{u}, \mathbf{v}$ roviny $M\mathbf{u}\mathbf{v}$.]

4 a) Presvedčte sa, že rezy eliptického paraboloidu (EP) resp. hyperbolického paraboloidu (HP) rovinami $z = c$ sú elipsy (pre $c > 0$) resp. hyperboly (pre $c \neq 0$).

b) Presvedčte sa, že rezy eliptického paraboloidu (EP) a hyperbolického paraboloidu (HP) rovinou $y = 0$ sú totožné paraboly.

c) Presvedčte sa, že rezy eliptického paraboloidu (EP) rovinami $x = c$ sú navzájom zhodné paraboly, pričom každá vznikne posunutím v E^3 z rezu pre $c = 0$. To isté platí aj pre hyperbolický paraboloid (HP).

5 Dokážte: a) Pre dané kladné číslo r je každá parabola zhodná s rezom rotačnej kužeľovej plochy $x^2 + y^2 - r^2 z^2 = 0$ vhodnou rovinou.

b) Každá elipsa a hyperbola je zhodná s rezom vhodnej rotačnej kužeľovej plochy vhodnou rovinou.

[Návod: a) Ukážte, že voľbou α, β možno rovnici (10.8) dosiahnuť $q = 0$, pričom koeficient $p = rm(r\beta - \alpha)$ môže voľbou m nadobudnúť ľubovoľnú kladnú hodnotu. b) Zrekonštruujte polosi a, b elipsy resp. hyperboly z koeficientov rovnice (10.8), úloha 1.24.10.]

11 Projektívny pohľad na kužeľosečky

V tejto kapitole pracujeme v euklidovskej rovine E^2 a v jej projektívnom rozšírení ${}_pE^2$ (pozri Dodatok II). Od kužeľosečky Q prejdeme k jej projektívnemu rozšíreniu ${}_pQ$, čím sa mnohé dôležité vlastnosti kužeľosečky zjednodušia a sprehladnia.

11.1 Uvažujme kužeľosečku Q vyjadrenú v afinných súradniciach rovnicou

$$(11.1) \quad ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0, \quad (a, b, c) \neq (0, 0, 0).$$

Rovnicu kužeľosečky Q v odpovedajúcich homogénnych súradniciach $(x_1: x_2: x_0)$ získame tak, že do rovnice (11.1) dosadíme $x = x_1/x_0$, $y = x_2/x_0$ a potom ju vynásobíme výrazom x_0^2 :

$$(11.2) \quad ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2 + 2dx_1x_0 + 2ex_2x_0 + fx_0^2 = 0, \quad (a, b, c) \neq (0, 0, 0).$$

Rovnica (11.2) vyjadruje projektívne rozšírenie ${}_pQ$ kužeľosečky Q v rozšírenej euklidovskej rovine ${}_pE^2 = E^2 \cup \infty E^2$.

Aj rovnicu (11.2) môžeme výhodne zapísať pomocou matíc. Homogénne súradnice bodu $X = (x_1: x_2: x_0)$ zapisujeme ako obvykle do stĺpcovej matice $\mathbf{X} = (x_1 \ x_2 \ x_0)^T$. Rovnica (11.2) má maticovú reprezentáciu

$$(11.3) \quad \mathbf{X}^T \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{X} = 0.$$

11.2 Bod $X \in {}_pE^2$ je bodom projektívneho rozšírenia ${}_pQ$ kužeľosečky Q práve vtedy, keď jeho homogénne súradnice vyhovujú rovnici (11.2).

Vlastné body kužeľosečky ${}_pQ$ sú práve všetky body pôvodnej kužeľosečky Q , čiže ${}_pQ \cap E^2 = Q$, inými slovami $Q = {}_pQ \setminus \infty E^2$.

Nevlastné body projektívneho rozšírenia kužeľosečky ${}_pQ$ sú práve všetky asymptotické smery pôvodnej kužeľosečky Q . Naozaj, nevlastný bod U , teda smer generovaný vektorom $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$, má homogénne súradnice $(u_1: u_2: 0)$, preto $U \in {}_pQ$ práve vtedy, keď

$$au_1^2 + 2bu_1u_2 + cu_2^2 = 0,$$

teda práve vtedy, keď vektor $\mathbf{u}$ je asymptotický, teda keď U je asymptotický smer (definícia 2.4).

11.3 Kedy je kužeľosečka ${}_pQ$ regulárna resp. singularná a kedy je jej bod regulárny resp. singularný, sa definuje v plnej analógii s odsekmi 1.6 a 3.6. Zjednodušenie problematiky sa prejavuje v tvrdení, že kužeľosečka ${}_pQ$ je singularná práve vtedy, keď má aspoň jeden singularný bod (v porovnaní so zložitou poznámkou 3.8).

11.4 Asymptotické smery kužeľosečky Q sú jednoducho nevlastné body kužeľosečky ${}_pQ$. Eliptický, parabolický a hyperbolický typ kužeľosečky teda závisí od počtu 0, 1, 2 jej priesečníkov s nevlastnou priamkou.

11.5 Definícia stredu kužeľosečky ${}_pQ$ je priamou analógiou definície stredu kužeľosečky Q z odseku 3.1. Je to teda bod, ktorého homogénne súradnice vyhovujú sústave

$$(11.4) \quad \begin{array}{l} ax_1 + bx_2 + dx_0 = 0 \\ bx_1 + cx_2 + ex_0 = 0 \end{array}$$

Na rozdiel od afinného prípadu, každá projektívna kužeľosečka ${}_pQ$ má stred (vlastný alebo nevlastný), lebo sústava homogénnych lineárnych rovníc (11.4) má vždy netriviálne riešenie.

Špeciálne, rovnica projektívneho rozšírenia paraboly $y^2 - 2px = 0$ je $x_2^2 + 2px_1x_0 = 0$, preto rovnice pre stred sú $px_0 = 0$ a $x_2 = 0$. Riešením je bod $S = (1: 0: 0)$. Stredom projektívneho rozšírenia paraboly $y^2 - 2px = 0$ je nevlastný bod prvej súradnicovej osi, čo je nevlastný bod uvažovanej paraboly.

V ďalšom texte už nebudeme striktné rozlišovať medzi kužeľosečkou Q v E^2 a jej projektívnym rozšírením ${}_pQ$ v ${}_pE^2$, pričom sa budeme spoliehať na kontext.

11.6 Prechod od kuželosečky v euklidovskej rovine k jej projektívnemu rozšíreniu umožňuje zlúčiť doterajšie dva druhy polarít – poláru bodu a poláru smeru: doterajšia polára bodu je polárou vlastného bodu a polára smeru je polárou nevlastného bodu. Rovnica poláry $Q(M)$ vlastného alebo nevlastného bodu $M = (m_1: m_2: m_0)$ vzhľadom na kuželosečku Q je

$$(11.5) \quad (am_1 + bm_2 + dm_0)x_1 + (bm_1 + cm_2 + em_0)x_2 + (dm_1 + em_2 + fm_0)x_0 = 0.$$

Maticovo

$$(\mathbf{M}^T \cdot \mathbf{Q}) \cdot \mathbf{X} = 0.$$

Nadalej platí symetričnosť polarít, ktorá zlučuje vety 4.6, 5.5, 5.6 a 5.9a:

$$(11.6) \quad P \in Q(M) \Rightarrow M \in Q(P).$$

11.7 Z rovnice (11.5) pre poláru bodu $M \in {}_pE^2$ ihneď vyplýva, že polárou singulárneho bodu kuželosečky je celá rozšírená rovina ${}_pE^2$. V opačnom prípade, teda ak je bod M regulárnym bodom kuželosečky, alebo ak na nej neleží, je polárou $Q(M)$ priamka.

11.8 Pretože rovnica nevlastnej priamky ∞E^2 je $x_0 = 0$, zo sústavy (11.4) a z rovnice (11.5) vyplýva, že polára stredu kuželosečky obsahuje nevlastnú priamku ∞E^2 .

11.9 Definícia dotýčnice regulárnej kuželosečky sa v projektívnom prístupe zjednodušuje oproti afinnému – je to priamka, ktorá kuželosečku pretína v jedinom bode. Ako v afinnom prípade, dotýčnicou kuželosečky Q v bode M je jeho polára $Q(M)$ vyjadrená rovnicou (11.5). Špeciálne dotýčnicou paraboly v jej nevlastnom bode je nevlastná priamka roviny.

11.10 V projektívnom jazyku možno povedať, že priemer kuželosečky je polára nevlastného bodu, ktorý nie je bodom kuželosečky a asymptota regulárnej kuželosečky je polára nevlastného bodu, ktorý je bodom kuželosečky. Asymptota regulárnej kuželosečky je teda dotýčnica kuželosečky v jej nevlastnom bode.

Špeciálne, nevlastná priamka roviny je asymptotou paraboly.

11.11 Zo súmernosti polarít a z projektívnej charakteristiky stredu kuželosečky (odsek 11.8) okamžite vyplýva, že všetky priemery kuželosečky a asymptoty regulárnej kuželosečky prechádzajú stredom kuželosečky a naopak, každá priamka idúca stredom kuželosečky je priemer kuželosečky alebo asymptota regulárnej kuželosečky.

Špeciálne pre parabolu sa potvrdzuje, že všetky jej priemery sú navzájom rovnobežné, lebo stred paraboly je jej nevlastný bod.

11.12 Úlohy

1 Presvedčte sa, že spoločný nevlastný bod dvojice rovnobežiek $x_1^2 - x_0^2 = 0$ je ich singulárny bod.

2 Priamym výpočtom sa presvedčte, že polára nevlastného bodu paraboly $y^2 - 2px = 0$ je nevlastná priamka.

3 Nájdite všetky priesečníky projektívneho rozšírenia hyperboly $x^2/a^2 - y^2/b^2 - 1 = 0$ s priamkou v ${}_pE^2$, ktorej afinná časť je rovnobežná s asymptotou a rôzna od nej.

4 Presvedčte sa, že tvrdenie z úlohy 5.11.4 je priamym dôsledkom geometrickej charakteristiky poláry z poznámky 4.7 pre prípad, že priesečníkom dotýčníc je nevlastný bod.

5 Dokážte, že pre regulárnu kuželosečku Q platí: Každá priamka v projektívnom rozšírení roviny je polárou práve jedného bodu (hovoríme, že ten bod je *pól* tej priamky).

6 Dokážte: Priamka p idúca bodom M regulárnej kuželosečky ${}_pQ$ má s ňou spoločný práve jeden bod vtedy a len vtedy, keď p je polárou bodu M . [Návod: Priamku p vyjadrite parametricky $X = uM + vN$ a ukážte, že M je jediný priesečník práve vtedy, keď $N \in Q(M)$.]

Dodatok I: Transformácia súradníc

Riešenie geometrickej úlohy analytickou metódou často môžeme zjednodušiť vhodnou voľbou sústavy súradníc. Spravidla to znamená, že musíme prejsť od terajšej sústavy súradníc k novej. Je dôležité si uvedomiť, že analytické vyjadrenia geometrických objektov, ako sú body, vektory, priamky, ..., nezávisia len od ich umiestnenia v priestore, ale aj od sústavy súradníc. Teda pri zmene sústavy súradníc sa menia súradnice bodov a vektorov a tiež koeficienty v rovniciach podpriestorov.

Sústredíme sa iba na 2D prípad. Z neho jednoduchými a veľmi prirodzenými úpravami získame odpovedajúce výsledky pre E^3 a prípadne aj všeobecne pre E^n .

I.1 V rovine E^2 uvažujeme dve sústavy súradníc $O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ a $O', \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2$.

Súradnice bodu X vzhľadom na prvú sústavu súradníc označíme (x_1, x_2) a vzhľadom na druhú (x'_1, x'_2) . Prvú sústavu súradníc nazývame tiež *stará sústava súradníc* a druhú *nová sústava súradníc* a odpovedajúcim spôsobom hovoríme o *starých* a *nových súradniciach bodu X* .

Novú sústavu súradníc určujeme starými súradnicami začiatku a súradnicových vektorov novej sústavy súradníc:

$$(I.1a) \quad O' = (a_{10}, a_{20}) \quad (\text{staré súradnice})$$

$$(I.1b) \quad \mathbf{e}'_1 = (a_{11}, a_{21}), \quad \mathbf{e}'_2 = (a_{12}, a_{22}) \quad (\text{staré súradnice})$$

Druhý index $j = 0, 1, 2$ vyjadruje poradové číslo objektu novej sústavy súradníc:

$j = 0$ pre bod O' , $j = 1$ pre vektor $\mathbf{e}'_1$ a $j = 2$ pre $\mathbf{e}'_2$.

Prvý index $i = 1, 2$ vyjadruje poradové číslo súradnice objektu novej sústavy súradníc (bod O' , vektora $\mathbf{e}'_1$ alebo $\mathbf{e}'_2$).

I.2 Nové súradnice bodu X sú určené rovnosťou

$$(I.2) \quad X = O' + x'_1 \mathbf{e}'_1 + x'_2 \mathbf{e}'_2$$

Túto rovnosť rozpíšeme do starých súradníc. Po malej algebraickej úprave dostaneme prepojenie medzi starými a novými súradnicami bodu X :

$$(I.3) \quad \begin{aligned} x_1 &= a_{11}x'_1 + a_{12}x'_2 + a_{10} && \text{transformačné rovnice} \\ x_2 &= a_{21}x'_1 + a_{22}x'_2 + a_{20} && \text{pre súradnice bodov} \end{aligned}$$

Vzorce (I.3) sa nazývajú *transformačné rovnice* pre prechod od starej sústavy súradníc k novej.

Transformačné rovnice (I.3) vyjadrujú staré súradnice bodu ako lineárne funkcie jeho nových súradníc. Koeficientmi funkcií sú staré súradnice nových súradnicových vektorov, pozri (I.1b) a nového začiatku sústavy súradníc, pozri (I.1a). Súradnice z pravých strán vzorcov (I.1b) a (I.1a) sú v transformačných rovniciach (I.3) rozmiestnené zvislo.

I.3 Spravidla poznáme staré súradnice bodu a potrebujeme určiť nové súradnice bodu. Vtedy transformačné rovnice (I.3) predstavujú sústavu rovníc, v ktorej neznámymi sú nové súradnice (x'_1, x'_2) . Nové súradnice bodu X teda získame vyriešením transformačných rovníc.

Ak je nová sústava súradníc karteziánska, nové súradnice bodu môžeme získať bez riešenia transformačných rovníc veľmi jednoducho pomocou skalárneho súčinu:

$$x'_1 = (X - O') \cdot \mathbf{e}'_1, \quad x'_2 = (X - O') \cdot \mathbf{e}'_2$$

Rovnicu (I.2) sme prepísali do ekvivalentného tvaru $X - O' = x'_1 \mathbf{e}'_1 + x'_2 \mathbf{e}'_2$ a potom sme ju skalárne vynásobili vektormi $\mathbf{e}'_1$ a $\mathbf{e}'_2$.

I.4 Príklad Napíšte rovnicu priamky $p: 2x + 3y - 1 = 0$ v sústave súradníc so začiatkom $O' = (-2, 2)$ a so súradnicovými vektormi $\mathbf{e}'_1 = (2, 1)$, $\mathbf{e}'_2 = (-1, 1)$.

Riešenie. Transformačné rovnice pre prechod od pôvodnej sústave súradníc k sústave súradníc O' , $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$ sú

$$\begin{aligned}x &= 2x' - y' - 2 \\ y &= x' + y' + 2\end{aligned}$$

Rovnicu priamky p v novej sústave súradníc získame dosadením z transformačných rovníc do rovnice priamky v pôvodnej sústave súradníc: $2(2x' - y' - 2) + 3(x' + y' + 2) - 1 = 0$. Teda priamka p má v novej sústave súradníc rovnicu $7x' + y' + 1 = 0$. $\square$

I.5 Transformačné rovnice (I.3) sa prehľadne dajú zapísať pomocou matic. Najprv zavedme matice

$$(I.4) \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}_0 = \begin{pmatrix} a_{10} \\ a_{20} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

$$(I.5) \quad \tilde{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{X}}' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{F}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{10} \\ a_{21} & a_{22} & a_{20} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(Uvedomte si, aké informácie obsahujú stĺpce týchto siedmich matic.)

Teraz sú dve transformačné rovnice (I.3) ekvivalentné s jednou maticovou rovnosťou

$$(I.6) \quad \mathbf{X} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{X}' + \mathbf{F}_0, \quad \text{platí pre body}$$

resp. s ešte jednoduchšou rovnicou

$$(I.7) \quad \tilde{\mathbf{X}} = \tilde{\mathbf{F}} \cdot \tilde{\mathbf{X}}'.$$

Naozaj, keď vykonáme operácie s maticami na pravej strane rovností, získame rovnice (I.3).

I.6 Doterajšie výsledky o transformácii súradníc bodov doplníme o transformáciu súradníc vektorov. Z definície súradníc vektora vyplýva, že transformačné rovnice pre prechod od starých k novým súradniciam vektorov získame z transformačných rovníc (I.3) pre súradnice bodov tak, že na pravej strane vynecháme absolútne členy:

$$\begin{aligned}x_1 &= a_{11}x'_1 + a_{12}x'_2 && \text{transformačné rovnice} \\ x_2 &= a_{21}x'_1 + a_{22}x'_2 && \text{pre súradnice vektorov}\end{aligned}$$

V maticovom zápise sa vo vzťahu (I.6) vynechá matica $\mathbf{F}_0$:

$$(I.8) \quad \mathbf{X} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{X}' \quad \text{platí pre vektory}$$

Pre rozšírené súradnice vektorov platí rovnosť (I.7) bezo zmeny, teda

$$(I.9) \quad \tilde{\mathbf{X}} = \tilde{\mathbf{F}} \cdot \tilde{\mathbf{X}}' \quad \text{platí pre body a vektory}$$

I.7 Maticu $\tilde{\mathbf{F}}$ zo vzťahov (I.5) a (I.9) nazývame *matica prechodu* od (starej) sústavy súradníc O , $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ k (novej) sústave súradníc O' , $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$ a maticu $\mathbf{F}$ zo vzťahov (I.4) a (I.8) nazývame *matica prechodu* od (starej) bázy $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ k (novej) báze $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$.

Názov „matica prechodu“ sa vysvetľuje takto: Ak usporiadané dvojice vektorov $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ a $(\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2)$ chápeme ako matice typu $(1,2)$ s vektorovými hodnotami, a ak pripustíme násobenie vektora číslom sprava, tak rovnosti (I.1b) sú ekvivalentné s maticovou rovnosťou

$$(I.10) \quad (\mathbf{e}'_1 \mathbf{e}'_2) = (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2) \cdot \mathbf{F} \quad \text{matica prechodu pre bázy}$$

Ak formálne pripustíme aj násobenie $O1 = O$, vzťahy (I.1a) a (I.1b) sú ekvivalentné s

$$(I.11) \quad (\mathbf{e}'_1 \mathbf{e}'_2 O') = (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 O) \cdot \tilde{\mathbf{F}} \quad \text{matica prechodu pre sústavy súradníc}$$

I.8 Pripomeňme, že v stĺpcoch matice $\mathbf{F}$ sa nachádzajú súradnice vektorov $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$ vzhľadom na bázu $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$. Stĺpce matice $\mathbf{F}$ sú teda lineárne nezávislé, preto je matica $\mathbf{F}$ regulárna, teda jej determinant je nenulový. Ak determinant matice $\tilde{\mathbf{F}}$ rozvineme podľa posledného riadku, uvidíme, že tento determinant sa rovná determinantu matice $\mathbf{F}$. Je teda nenulový, preto je re-

gulárna aj matica $\mathbf{F}^{\sim}$. Existujú teda inverzné matice $\mathbf{F}^{-1}$ a $\mathbf{F}^{\sim-1}$. Z rovností (I.6) resp. (I.8) a (I.9) môžeme maticovými operáciami vyjadriť nové súradnice bodov a vektorov takto

$$(I.12b) \quad \mathbf{X}' = \mathbf{F}^{-1} \cdot (\mathbf{X} - \mathbf{F}_0) \quad (\text{platí pre body})$$

$$(I.12v) \quad \mathbf{X}' = \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{X} \quad (\text{platí pre vektory})$$

$$(I.12bv) \quad \mathbf{X}^{\sim'} = \mathbf{F}^{\sim-1} \cdot \mathbf{X}^{\sim} \quad (\text{platí pre body aj pre vektory})$$

I.9 Úlohy

1 Nájdite súradnice bodov $A = (4,6)$, $B = (4,0)$ a vektorov $\mathbf{u} = (2,-1)$, $\mathbf{v} = (-1,8)$ v sústave súradníc $O' = (2,1)$, $\mathbf{e}'_1 = (1,1)$, $\mathbf{e}'_2 = (-1,2)$. [$A = (3,1)$, $B = (1,-1)$, $\mathbf{u} = (1,-1)$, $\mathbf{v} = (2,3)$.]

2 Nájdite sústavu súradníc, v ktorej majú body $A = (0,5)$, $B = (2,8)$, $C = (-1,-4)$ nové súradnice $A = (1,1)$, $B = (2,1)$, $C = (-1,-2)$. [$O' = (-1,1)$, $\mathbf{e}'_1 = (2,3)$, $\mathbf{e}'_2 = (-1,1)$.]

3 Pre transformačné rovnice

$$x = 2x' + y' - 3$$

$$y = x' + y' + 1$$

vyjadrite nové súradnice (x', y') bodu resp. vektora pomocou starých súradníc (x, y) .

[Pre body: $x' = x - y + 4$, $y' = -x + 2y - 5$, pre vektory: $x' = x - y$, $y' = -x + 2y$.]

Dodatok II: Projektívne rozšírenie euklidovskej roviny

Vo vetách geometrie sa niekedy vyskytujú zvláštne prípady, ktoré súvisia s rovnobežnosťou. So základným prípadom ich možno zlúčiť tak, že k rovine resp. k priestoru pridáme ďalšie body, ktoré sa stanú dovtedy chýbajúcimi priesečníkmi rovnobežných priamok. Pridané body budeme nazývať nevlastné body. V literatúre sa niekedy nazývajú body v nekonečne (tak ich aj intuitívne interpretujeme) zriedkavejšie tiež ideálne body.

II.1 Definícia *Nevlastný bod roviny* je smer v rovine E^2 . Množinu všetkých nevlastných bodov roviny E^2 označujeme symbolom ∞E^2 .

Projektívne rozšírenie euklidovskej roviny E^2 (skrátene *rozšírená euklidovská rovina* alebo iba *rozšírená rovina*) je euklidovská rovina E^2 spolu so všetkými jej nevlastnými bodmi. Projektívne rozšírenie euklidovskej priestory E^2 označujeme ${}_pE^2$. Teda

$$(II.1) \quad {}_pE^2 = E^2 \cup \infty E^2.$$

Body euklidovskej roviny E^2 sa nazývajú *vlastné body* jej projektívneho rozšírenia ${}_pE^2$. Vlastný alebo nevlastný bod rozšírenej euklidovskej roviny ${}_pE^2$ skrátene nazývame *bod*.

Analogicky sa postupuje v euklidovskom priestore ľubovoľnej dimenzie.

II.2 Poznámky 1. Máme dve navzájom ekvivalentné interpretácie nevlastných bodov.

Algebraická: Smer v rovine je jednorozmerný vektorový podpriestor vektorovej zložky $V(E^2)$ roviny.

Geometrická: Smer v rovine je množina všetkých navzájom rovnobežných priamok roviny.

Prepojenie medzi nimi: Jednorozmernému vektorovému podpriestoru $U \subset V(E^2)$ odpovedá množina všetkých priamok $a \subset E^2$, pre ktoré $U = V(a)$. Tieto priamky sú navzájom rovnobežné. Naopak, množine všetkých medzi sebou rovnobežných priamok priradíme ich spoločnú vektorovú zložku, čo je jednorozmerný vektorový podpriestor vektorovej zložky roviny E^2 .

2. Vlastné aj nevlastné body jednotne zapisujeme veľkými latinskými písmenami.

3. Na rozdiel od euklidovskej roviny, v projektívnom rozšírení roviny nie sú vektory. Vystupujú však vo vedľajšej úlohe v definícii súradníc nevlastných bodov (odsek 11.6).

II.3 V rozšírenej rovine ${}_pE^2$ sú dva druhy priamok. 1. *Vlastná priamka* je priamka a euklidovskej roviny E^2 spolu s jej nevlastným bodom $V(a)$. Označujeme ju ${}_pa$ (projektívne rozšírenie priamky a). Teda

$$(II.2) \quad {}_pa = a \cup \{V(a)\}$$

(uvedomte si, že symbol ${}_pa = a \cup V(a)$ má iný význam). Priamka a sa spätne nazýva *vlastná časť* vlastnej priamky ${}_pa$. Pritom $a \subset E^2$ a ${}_pa \subset {}_pE^2$.

Nevlastná priamka je množina ∞E^2 všetkých nevlastných bodov roviny.

Nevlastný bod priamky $a \subset E^2$ alternatívne označujeme ∞a , čiže

$$(II.3) \quad \infty a = V(a), \quad {}_pa = a \cup \{\infty a\}.$$

Každá vlastná priamka obsahuje nekonečne veľa vlastných bodov a práve jeden nevlastný. Nevlastná priamka obsahuje iba nevlastné body.

V rozšírenej rovine je nekonečne veľa vlastných priamok, nevlastná priamka je tam iba jedna.

II.4 Veta Každými dvomi rôznymi bodmi rozšírenej roviny ${}_pE^2$ prechádza práve jedna priamka (vlastná alebo nevlastná).

Dôkaz prenechávame čitateľovi. Treba prebrať prípady, keď oba body sú vlastné, keď jeden je vlastný a druhý nevlastný a keď oba sú nevlastné. $\square$

II.5 Veta V rozšírenej rovine ${}_pE^2$ sa každé dve navzájom rôzne priamky pretínajú v práve jednom bode.

Dôkaz. Uvedomme si, že z dvoch navzájom rôznych priamok roviny je aspoň jedna vlastná.

Ak ide o dve vlastné priamky ${}_pa = a \cup \{\infty a\}$, ${}_pb = b \cup \{\infty b\}$, pričom ich vlastné časti $a, b \subset E^2$ sú rôznobežné, tak ${}_pa \cap {}_pb$ je vlastný bod, priesečník $a \cap b$ vlastných častí vlastných priamok ${}_pa, {}_pb$. Ak sú vlastné časti priamok ${}_pa, {}_pb$ rovnobežné, tak priamky ${}_pa, {}_pb$ majú spoločný práve nevlastný bod $\infty a = \infty b$.

Prienik vlastnej priamky s nevlastnou priamkou je nevlastný bod vlastnej priamky, teda zasa práve jeden bod. $\square$

Odteraz predpokladáme, že v euklidovskej rovine E^2 je daná afinná sústava súradníc. Na ňu sa vzťahujú súradnice všetkých bodov a vektorov euklidovskej roviny.

II.6 Definícia Homogénne súradnice vlastného bodu $X \in {}_pE^2$ je každá trojica reálnych čísel $(x_1, x_2, x_0) \in \mathbf{R}^3$, pre ktorú

(II.4v) $x_0 \neq 0$ a $(x_1/x_0, x_2/x_0)$ sú afinné súradnice bodu X .

Homogénne súradnice nevlastného bodu $X \in {}_pE^2$, teda smeru v E^2 , je každá trojica reálnych čísel

(II.4n) $(x_1, x_2, 0) \in \mathbf{R}^3$,

pre ktorú (x_1, x_2) sú afinné súradnice nenulového vektora smeru X .

Skutočnosť, že (vlastný alebo nevlastný) bod X má homogénne súradnice (x_1, x_2, x_0) , zapisujeme formálnou rovnosťou $X = (x_1 : x_2 : x_0)$.

Oddeľovač „:“ v homogénnych súradniciach čítame „ku“. Vysvetľuje to poznámka II.8.4. Použitie indexu 0 pre poslednú zložku trojice homogénnych súradníc vysvetľuje jej špecifické postavenie vo vzorcoch (II.4v) a (II.4n).

II.7 Homogénne súradnice bodov v ${}_pE^3$ sa vzťahujú na afinnú sústavu súradníc v E^2 , preto ich niekedy podrobnejšie nazývame *afinné homogénne súradnice*.

Vlastné body majú afinné súradnice aj afinné homogénne súradnice. Kvôli ich lepšiemu odlíšaniu afinné súradnice vlastných bodov niekedy nazývame *nehomogénne súradnice*. Napríklad $(3, -2)$ sú nehomogénne súradnice bodu s homogénnymi súradnicami $(6: -4: 2)$.

II.8 Poznámky 1. Rozšírené afinné súradnice $(x_1, x_2, 1)$ vlastného bodu sú špeciálnym prípadom jeho homogénnych súradníc. Rozšírené afinné súradnice $(x_1, x_2, 0)$ nenulového vektora $\mathbf{x}$ sú homogénne súradnice nevlastného bodu X generovaného vektorom $\mathbf{x}$.

2. Každý vlastný aj nevlastný bod môžeme prostredníctvom homogénnych súradníc vyjadriť nekonečne veľa spôsobmi:

Ak (x_1, x_2) sú afinné súradnice vlastného bodu X a $k \neq 0$ je ľubovoľné číslo, tak každá trojica $(kx_1 : kx_2 : k)$ je homogénnymi súradnicami bodu X , lebo $(kx_1)/k = x_1$, $(kx_2)/k = x_2$. Napríklad pre bod X s afinnými súradnicami $(3, -2)$ platí

(II.5) $X = (3: -2: 1), X = (6: -4: 2), X = (-3: 2: -1), \dots$

Ak (x_1, x_2) sú afinné súradnice nenulového vektora $\mathbf{x}$ smeru $U \subset V(E^2)$ a $k \neq 0$ je ľubovoľné číslo, tak (kx_1, kx_2) sú súradnice nenulového vektora $k\mathbf{x}$ zo smeru U , preto $(kx_1 : kx_2 : 0)$ sú homogénne súradnice nevlastného bodu U .

3. Homogénne súradnice vlastného aj nevlastného bodu sú nenulovou usporiadanou trojicou čísel. Naopak, každá nenulová usporiadaná štvorica čísel predstavuje homogénne súradnice práve jedného (vlastného alebo nevlastného) bodu. Výraz $(0: 0: 0)$ nepredstavuje homogénne súradnice žiadneho bodu.

4. Skutočnosť, že trojice $(x_1 : x_2 : x_0)$ a $(y_1 : y_2 : y_0)$ sú homogénnymi súradnicami rovnakého bodu, je ekvivalentná s rovnosťami pomerov

(II.6) $x_1 : y_1 = x_2 : y_2 = x_0 : y_0$.

Podmienku (II.6) môžeme zapísať aj takto

(II.7) $x_1 : x_2 : x_0 = y_1 : y_2 : y_0$.

(Ak je jedno z čísel x_i alebo y_i nulové, je nulové aj druhé a príslušný pomer sa rovnostiach (II.6) a (II.7) vynecháva.)

Môžeme teda povedať, že hoci homogénne súradnice bodu nie sú určené jednoznačne, pomery zložiek homogénnych súradníc bodu sú určené jednoznačne.

Špecifickú úlohu poslednej zložky homogénnych súradníc vyjadruje nasledujúca veta, ktorá vyplýva priamo z definície II.6.

II.9 Veta Pre afinné homogénne súradnice platí:

a) Bod $X = (x_1: x_2: x_0)$ je vlastný, ak $x_0 \neq 0$, alebo nevlastný, ak $x_0 = 0$.

b) Homogénne súradnice $(x_1: x_2: x_0)$ vlastného bodu sú s jeho afinnými súradnicami (x, y) prepojené rovnosťami

$$x = x_1/x_0, \quad y = x_2/x_0.$$

□

II.10 Veta Rovnica priamky. Každá priamka v projektívnom rozšírení ${}_pE^2$ euklidovskej roviny E^2 je analyticky vyjadrená rovnicou

$$(II.8) \quad a_1x_1 + a_2x_2 + a_0x_0 = 0,$$

v ktorej aspoň jeden z koeficientov a_1, a_2, a_0 je nenulový.

Dôkaz. 1. Vlastné priamky. V E^2 uvažujme priamku a danú v nehomogénnych súradniciach rovnicou $a_1x + a_2y + a_0 = 0$, pričom $a_1 \neq 0$ alebo $a_2 \neq 0$. Do rovnice dosadíme vyjadrenie nehomogénnych súradníc prostredníctvom homogénnych z vety II.9b

$$x = x_1/x_0, \quad y = x_2/x_0, \quad x_0 \neq 0.$$

Po vynásobení rovnice súradnicou x_0 vidíme, že afinné homogénne súradnice vlastných bodov vlastnej priamky ${}_pa$ vyhovujú rovnici (II.8).

Obrátením opísaného postupu sa možno presvedčiť, že ak afinné homogénne súradnice $(x_1: x_2: x_0)$ vlastného bodu vyhovujú rovnici (II.8), tak tento bod leží na priamke a .

Afinné homogénne súradnice $(x_1: x_2: 0)$ nevlastného bodu X vyhovujú rovnici (II.8) práve vtedy, keď $a_1x_1 + a_2x_2 = 0$, teda práve vtedy, keď vektor $\mathbf{u} \in V(E^2)$ s afinnými súradnicami (x_1, x_2) je smerovým vektorom priamky a , čo je práve vtedy, keď X je nevlastný bod priamky a .

2. Body nevlastnej priamky $a = {}_\infty E^2$ zrejme charakterizuje rovnica $x_0 = 0$, čo je špeciálny prípad rovnice (II.8) pre $a_1 = a_2 = 0$ a $a_0 = 1$. □

II.11 Parametrické rovnice priamky. Uvažujme priamku AB , $A = (a_1: a_2: a_0)$, $B = (b_1: b_2: b_0)$. Podľa vety II.9 priamku možno vyjadriť nenulovou lineárnou homogénnou rovnicou (II.8); pre ňu sú homogénne súradnice bodov A, B dve nezávislé riešenia. Z lineárnej algebry vieme, že všetky netriviálne riešenia rovnice (II.8) sú práve všetky lineárne kombinácie súradníc bodov A, B s nenulovými koeficientmi.

Geometricky: Bod $X = (x_1: x_2: x_0)$ leží na priamke AB , $A = (a_1: a_2: a_0)$, $B = (b_1: b_2: b_0)$, práve vtedy, keď existuje taká nenulová dvojica reálnych čísel (t_1, t_2) , že

$$(II.9) \quad \left. \begin{aligned} x_1 &= a_1t_1 + b_1t_2 \\ x_2 &= a_2t_1 + b_2t_2 \\ x_0 &= a_0t_1 + b_0t_2 \end{aligned} \right\}$$

Získali sme *parametrické vyjadrenie priamky AB*. Číslam t_1, t_2 hovoríme (*homogénne*) *parametre* bodu na priamke.

Veľmi prehľadne možno parametrické vyjadrenie priamky zapísať pomocou matic:

$$(II.10) \quad \mathbf{X} = t_1\mathbf{A} + t_2\mathbf{B}.$$

II.12 Poznámka Medzi parametrickými vyjadreniami priamky v nehomogénnych a v homogénnych súradniciach sú tri zásadné rozdiely:

1. Parametrické rovnice sú tri.

2. V parametrickom vyjadrení priamky v homogénnych súradniciach sú dva parametre.
3. Parametre v parametrickom vyjadrení s využitím homogénnych nie sú bodom priamky určené jednoznačne, sú homogénne. To znamená, že ak (t_1, t_2) sú parametre bodu X priamky AB , tak tento bod má aj parametre (kt_1, kt_2) pre ľubovoľné $k \neq 0$. Ak totiž $\mathbf{X} = t_1\mathbf{A} + t_2\mathbf{B}$, tak $k\mathbf{X} = (kt_1)\mathbf{A}_1 + (kt_2)\mathbf{A}_2$ a v matici $k\mathbf{X}$ sú opäť homogénne súradnice bodu X .

II.13 Využitie vektorového súčinu v projektívnej rovine Skutočnosť, že bod $P = (p_1: p_2: p_0)$ leží na priamke s rovnicou $a_1x_1 + a_2x_2 + a_0x_0 = 0$ algebraicky vyjadruje kolmosť vektorov $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_0)$ a $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_0)$ vektorového priestoru $\mathbf{R}^3$. Preto homogénne súradnice priesečníka $P = (p_1: p_2: p_0)$ dvoch rôznych priamok s rovnicami $a_1x_1 + a_2x_2 + a_0x_0 = 0$ a $b_1x_1 + b_2x_2 + b_0x_0 = 0$ môžeme efektívne získať pomocou vektorového súčinu v $\mathbf{R}^3$:

$$(II.11) \quad (p_1: p_2: p_0) = (a_1, a_2, a_0) \times (b_1, b_2, b_0) = \\ = (a_2b_0 - a_0b_2: a_0b_1 - a_1b_0: a_1b_2 - a_2b_1).$$

Rovnako môžeme rýchlo a lacno získať koeficienty a_1, a_2, a_0 rovnice priamky, ktorá spája body P, Q , ak $P = (p_1: p_2: p_0)$, $Q = (q_1: q_2: q_0)$:

$$(II.12) \quad (a_1, a_2, a_0) = (p_1, p_2, p_0) \times (q_1, q_2, q_0) = (p_2q_0 - p_0q_2: p_0q_1 - p_1q_0: p_1q_2 - p_2q_1),$$

lebo platí $a_1p_1 + a_2p_2 + a_0p_0 = 0$ a $a_1q_1 + a_2q_2 + a_0q_0 = 0$, čiže hľadaný vektor $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_0)$ je kolmý na oba vektory $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_0)$ a $\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_0)$.