

Mnohouholníkové pletivá a lineárna rafinácia

Úvod do počítačovej grafiky

Marcel Makovník

Department of Algebra and Geometry
Faculty of Mathematics, Physics and Informatics
Comenius University in Bratislava, Slovakia

Vrchol, hrana, stena

Definícia

Nech $\mathcal{V} = \{V_1, \dots, V_m\}$, $V_i \in \mathbb{R}^3$, $i = 1, \dots, m$. Potom V_i sa nazýva **vrchol** a \mathcal{V} je množina **vrcholov**.

Definícia

Označme $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{V}^{[2]}$, kde $\mathcal{V}^{[2]} = \{[P_i, P_j] \in \mathcal{V}^2 \mid P_i \neq P_j\}$ a každé $e = [V_i, V_j] \in \mathcal{E}$ splňa $[V_j, V_i] = e$. Potom e sa nazýva **hrana** a \mathcal{E} sa nazýva **množina hrán**.

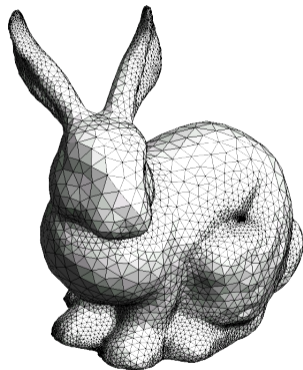
Definícia

Nech $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{V}^{[n]}$, $n \geq 3$, kde $\mathcal{V}^{[n]} = \{[V_{i_1}, V_{i_2}, \dots, V_{i_n}] \in \mathcal{V}^n \mid V_{i_j} \neq V_{i_k}, j \neq k\}$. Množina \mathcal{F} sa nazýva **množinou stien**. Jej prvok $\mathbf{F} = [V_{i_1}, V_{i_2}, \dots, V_{i_n}] \in \mathcal{F}$ nazývame **stena** a splňa podmienku, že všetky permutácie $V_{i_1}, V_{i_2}, \dots, V_{i_n}$ reprezentujú tú istú stenu \mathbf{F} .

Definícia

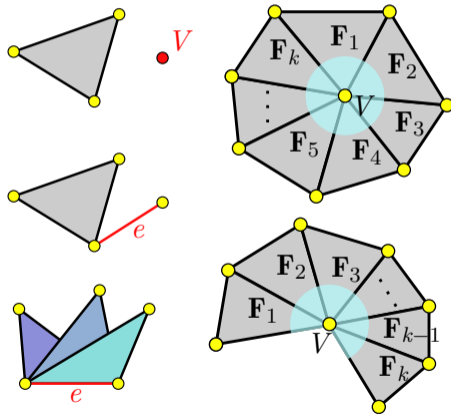
Označme $\mathcal{M} = \{\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{F}\}$. \mathcal{M} nazývame **mnohouholníkové pletivo**. Príslušné množiny vrcholov, hrán a stien sú označené $\mathcal{V}(\mathcal{M})$, $\mathcal{E}(\mathcal{M})$ a $\mathcal{F}(\mathcal{M})$.

Pletivo je **2-varieta**, ak pre každý bod pletiva \mathcal{M} vieme zostrojiť okolie, ktoré je homeomorfné s otvorenou podmnožinou euklidovskej roviny \mathbb{E}^2 .



Aby sme zabezpečili, že pletivo bude 2-varieta, musia byť splnené nasledovné podmienky:

- 1 každý vrchol $V \in \mathcal{V}$ leží na niektorej hrane z \mathcal{E}
- 2 každá hrana $e \in \mathcal{E}$ leží na niektorej stene z \mathcal{F}
- 3 každá hrana $e \in \mathcal{E}$ patrí nanajviš dvom stenám z \mathcal{F}
- 4 pre každú stenu $[P_i, P_j, P_k] \in \mathcal{F}$ máme $[P_i, P_j], [P_i, P_k], [P_j, P_k] \in \mathcal{E}$,
- 5 každý vrchol $V \in \mathcal{V}$ a všetky steny $\mathbf{F}_1, \dots, \mathbf{F}_k \in \mathcal{F}$ incidentné s V spĺňa jednu z podmienok:
 - $\mathbf{F}_1, \dots, \mathbf{F}_k$ tvoria jednoduchý cyklus V
 - $\mathbf{F}_1, \dots, \mathbf{F}_k$ tvoria jednoduchú postupnosť V



- Na vstupe uvažujme pletivo \mathcal{M} .
- Cieľom je zostrojiť pletivo \mathcal{M}' s väčším počtom vrcholov tak, že aplikujeme predpísané pravidlo – **schému** – na \mathcal{M} .
- Tento postup môžeme iteratívne opakovať. Limitnú plochu nazývame, že je to **rafinačná plocha (subdivision surface)**

- Ak je pravidlo, v každej iterácii rovnaké – **stacionárna rafinácia**
- Ak pravidlo je založené na afinných kombináciách – **lineárne schémy**
- Ak sa pravidlo aplikuje lokálne – **lokálne schémy**

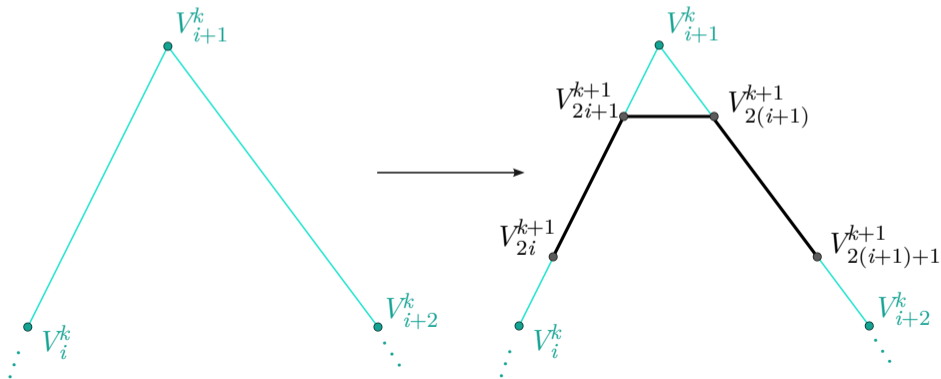
Najprv pre krivky – opis jedného kroku

- VSTUP: postupnosť bodov (lomená čiara) $V_1^i, \dots, V_n^i \in \mathbb{R}^m$.
- VÝSTUP: postupnosť bodov $V_1^{i+1}, \dots, V_k^{i+1} \in \mathbb{R}^m, k > n$.
- Pri lineárnych lokálnych schémach potrebujeme vyjadriť V_j^{i+1} ako afinnú kombináciu podmnožiny bodov P_1, \dots, P_n .

Chaikinova schéma

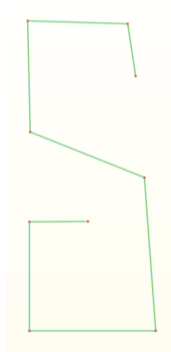
- Body zjemnenej lomenej čiary vyrátame podľa princípu **orezávania rohov (corner cutting)**

$$V_{2i}^{k+1} = \frac{3}{4} V_i^k + \frac{1}{4} V_{i+1}^k, \quad V_{2i+1}^{k+1} = \frac{1}{4} V_i^k + \frac{3}{4} V_{i+1}^k$$

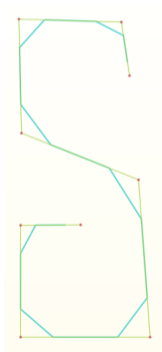


Chaikinova schéma

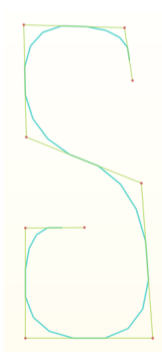
- Po každej iterácii sa počet vrcholov (približne) zdvojnásobí – konvergencia k limitnej krivke je rýchla



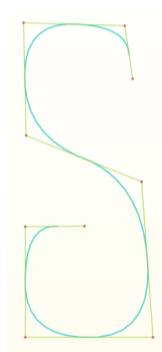
vstup



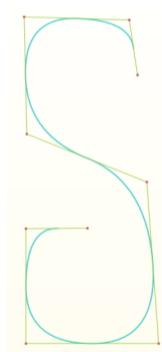
1. iterácia



2. iterácia



3. iterácia



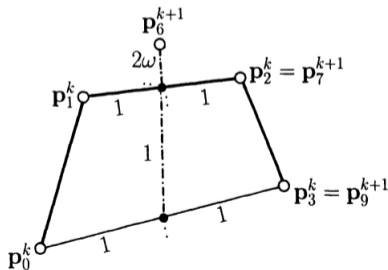
4. iterácia

Štvorbodová schéma

- Vstupom je **uzavretá** lomená čiara (polygón)
- Body zjemnenej lomenej čiary vyrátame podľa predpisu

$$P_{2i-1}^{k+1} = P_{i-2}^k, \quad P_{2i}^{k+1} = -\omega P_{i-3}^k + \left(\frac{1}{2} + \omega\right) P_{i-2}^k + \left(\frac{1}{2} + \omega\right) P_{i-1}^k - \omega P_i^k,$$

kde ω je tvarovací parameter.

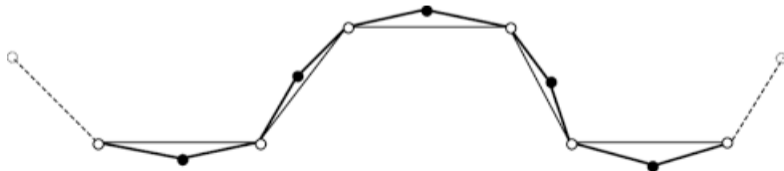


Štvorbodová schéma

- Vstupom je **uzavretá** lomená čiara (polygón)
- Body zjemnenej lomenej čiary vyrátame podľa predpisu

$$P_{2i-1}^{k+1} = P_{i-2}^k, \quad P_{2i}^{k+1} = -\omega P_{i-3}^k + \left(\frac{1}{2} + \omega\right) P_{i-2}^k + \left(\frac{1}{2} + \omega\right) P_{i-1}^k - \omega P_i^k,$$

kde ω je tvarovací parameter.



Lineárne schémy – konvergencia

- Na základe čoho vieme usúdiť, že zostrojená schéma nám naozaj skonverguje k limitnej krivke?
- Pre $\omega = \frac{1}{16}$ vieme štvorbodovú schému zapísať aj maticovo, ako

$$\begin{pmatrix} p_{-3}^{j+1} \\ p_{-2}^{j+1} \\ p_{-1}^{j+1} \\ p_0^{j+1} \\ p_1^{j+1} \\ p_2^{j+1} \\ p_3^{j+1} \end{pmatrix} = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} -1 & 9 & 9 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 16 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 9 & 9 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 16 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 9 & 9 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 16 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 9 & 9 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{-3}^{j+1} \\ p_{-2}^{j+1} \\ p_{-1}^{j+1} \\ p_0^{j+1} \\ p_1^{j+1} \\ p_2^{j+1} \\ p_3^{j+1} \end{pmatrix}$$

- Príslušnú maticu nazývame, že je to **rafinačná matica S**.

Lineárne schémy – konvergencia

- Označme ako \mathbf{x}_i , $i = 1, \dots, n$ vlastný vektor matice \mathbf{S} , prislúchajúci vlastnému číslu λ_i a nech vlastné čísla sú zoradené zostupne (t. j. λ_1 je najväčšie), čiže platí:

$$\mathbf{S}\mathbf{x}_i = \lambda_i\mathbf{x}_i.$$

- Potom ľubovoľný vektor \mathbf{p} môžeme zapísať ako lineárnu kombináciu vlastných vektorov

$$\mathbf{p} = \sum_{i=1}^n a_i\mathbf{x}_i.$$

- Ak uvažujeme, že \mathbf{p} je vektorizovaný bod zo vstupu, môžeme rátať

$$\mathbf{S}\mathbf{p}^0 = \mathbf{S} \sum_{i=1}^n a_i\mathbf{x}_i = \sum_{i=1}^n a_i\mathbf{S}\mathbf{x}_i = \sum_{i=1}^n a_i\lambda_i\mathbf{x}_i$$

Lineárne schémy – konvergencia

- Ak uvažujeme, že \mathbf{p} je vektorizovaný bod zo vstupu, môžeme rátať

$$\mathbf{S}\mathbf{p}^0 = \mathbf{S} \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{x}_i = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{S}\mathbf{x}_i = \sum_{i=1}^n a_i \lambda_i \mathbf{x}_i$$

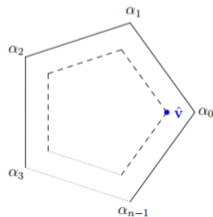
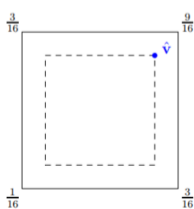
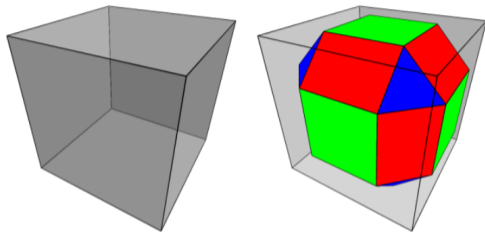
- Ak aplikujeme masku \mathbf{S} j -krát, dostávame

$$\mathbf{p}^j = \mathbf{S}^j \mathbf{p}^0 = \sum_{i=1}^n a_i \lambda_i^j \mathbf{x}_i$$

- Ak by sme zobrali $\lambda_1 > 1$, zrejme $\mathbf{S}^j \mathbf{x}$ by neohraničene rástlo a rafinácia by neskonvergovala.
- Preto, aby zvolená rafinačná schéma konvergovala, je potrebné, aby matica rafinácie mala všetky vlastné čísla nanajvyšš 1.
- Dá sa ukázať, že maximálne jedno vlastné číslo má hodnotu 1.

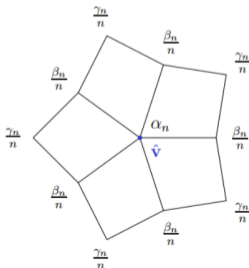
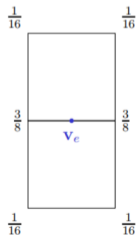
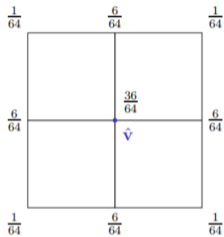
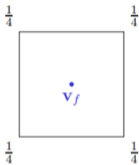
- Maska je štandardne zakreslená schematicky.
- Okrem samotného výpočtu súradnic nových vrcholov, je potrebné ešte zadefinovať **topologický krok**

Lineárne schémy – Doo-Sabin - orezávanie rohov



$$\alpha_i = \begin{cases} \frac{1}{4} + \frac{5}{4n} & i = 0, \\ \frac{3 + 2 \cos\left(\frac{2\pi i}{n}\right)}{4n} & i = 1, \dots, n-1. \end{cases}$$

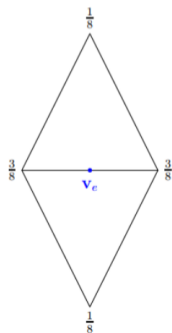
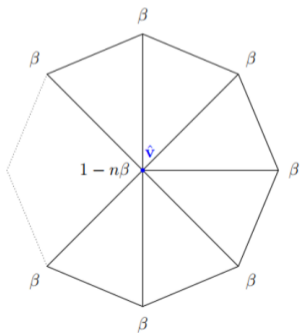
Lineárne schémy – Catmull-Clark - len pre štvoruholníkové pletivá



$$\beta_n = \frac{3}{2n}, \quad \gamma_n = \frac{1}{4n},$$

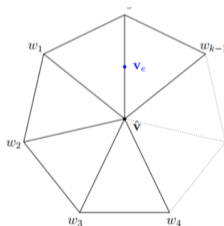
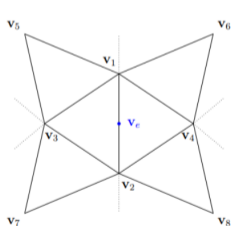
$$\alpha_n = 1 - \beta_n - \gamma_n$$

Lineárne schémy – Loop - len pre trojuholníkové pletivá



$$\beta = \frac{5}{8n} - \frac{1}{n} \left(\frac{3}{8} + \frac{1}{4} \cos \frac{2\pi}{n} \right)^2.$$

Lineárne schémy – Butterfly - len pre trojuholníkové pletivá - interpolačná



$$\begin{aligned}
 k = 3: & \quad w_0 = \frac{5}{12}, \quad w_1 = w_2 = -\frac{1}{12}, \\
 k = 4: & \quad w_0 = \frac{3}{8}, \quad w_2 = -\frac{1}{8}, \quad w_1 = w_3 = 0, \\
 k \geq 5: & \quad w_i = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{4} + \cos \frac{2\pi i}{n} + \frac{1}{2} \cos \frac{4\pi i}{n} \right).
 \end{aligned}$$

$$\mathbf{v}_e = \frac{1}{5}(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) + 2\omega(\mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4) - \omega(\mathbf{v}_5 + \mathbf{v}_6 + \mathbf{v}_7 + \mathbf{v}_8).$$

- Analýza konvergenzie je založená na podobnom princípe, ako to je pri krivkách
- Problémom ale je hladkosť plochy. Väčšina lineárnych schém je aspoň G^1 -hladká v regulárnych vrchoch. Analýza pre neregulárne vrcholy sa musí robiť osobitne.