

## Afinné zobrazenia – príklady

**Pr. A** Napíšte rovnice a maticové vyjadrenie afinnej transformácie  $\mathbf{T}_u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , ktorá reprezentuje posunutie bodu  $X = (x, y)^\top \in \mathbb{R}^2$  o vektor  $\mathbf{u} = (x_u, y_u)^\top \in \mathcal{V}(\mathbb{R}^2)$ .

**Pr. B** Napíšte rovnice a maticové vyjadrenie afinnej transformácie  $\mathbf{R}_\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , ktorá reprezentuje rotáciu bodu  $X = (x, y)^\top \in \mathbb{R}^2$  o uhol  $\varphi \in [0, 2\pi)$  v protismere hodinových ručičiek vzhľadom na začiatok súradnicovej sústavy.

**Pr. C** Napíšte rovnice a maticové vyjadrenie afinnej transformácie  $\mathbf{S}_{x_s, y_s} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , ktorá reprezentuje škálovanie bodu  $X = (x, y)^\top \in \mathbb{R}^2$  s koeficientmi  $x_s, y_s \neq 0$  vzhľadom na začiatok súradnicovej sústavy.

**Pr. D** Nájdite obraz štvoruholníka  $ABCD \subset \mathbb{R}^2$ , kde

$$A = (-1, 1)^\top, \quad B = (0, 0)^\top, \quad C = (1, 1)^\top, \quad D = (0, -1)^\top,$$

v afinnej transformácii, ktorá vznikne zložením škálovania s koeficientmi  $x_s = 3$ ,  $y_s = -2$ , posunutia o vektor  $\mathbf{u} = (-1, -1)^\top$  a rotácie o uhol  $\varphi = \pi/4$ , v tomto poradí.

**Pr. E** Ako vyzerajú afinné transformácie, inverzné k transformáciám z Príkladov A–C?

**Pr. F** Dokážte, že afinné transformácie priestoru  $\mathbb{R}^n$  tvoria grupu. Je grupou aj množina rotácií / posunutí / škálovaní?

**Pr. G** Je skladanie afinných transformácií komutatívne?

**Pr. H** Existuje transformácia, ktorá zobrazí štvoruholník  $ABCD$  z Príkladu D na štvoruholník  $A'B'C'D'$ , kde

$$A' = (-2, -3)^\top, \quad B' = (-1, 0)^\top, \quad C' = (0, 3)^\top, \quad D' = (-1, -1)^\top?$$

Ak nie, uveďte dôvod. Ak existuje, nájdite ju a zdôvodnite či táto transformácia je jednoznačná?

**Pr. I** Nájdite vyjadrenie transformácie  $\mathbf{R}_{\varphi, C}$ , ktorá reprezentuje rotáciu bodu  $X = (x, y)^\top \in \mathbb{R}^2$  o uhol  $\varphi \in [0, 2\pi)$  v protismere hodinových ručičiek vzhľadom na bod  $C = (x_C, y_C) \in \mathbb{R}^2$ .

**Pr. J** Nájdite všetky transformácie roviny  $\mathbf{T}$ , ktoré zobrazia úsečku  $AB$  na seba, ak

$$A = (-2, 1)^\top, \quad B = (1, 1)^\top.$$

**Pr. K** Nájdite všetky pevné body rovinnej transformácie  $\mathbf{T}$ , ktorá je v rozšírených súradniciach zadaná maticou

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aký objekt vytvára množina pevných bodov tejto transformácie? Ako sa zobrazí v tejto transformácii jednotkový štvorec s vrcholmi

$$A_{ij} = (i, j)^\top, \quad i, j = 0, 1?$$

Zostrojte náčrt, ktorý obsahuje jednotkový štvorec, jeho obraz a množinu pevných bodov a zamyslite sa o aký typ transformácie ide.

**Pr. L** Nájdite príklad transformácií roviny  $\mathbf{T}_1$  a  $\mathbf{T}_2$ , pre ktoré platí

- $\mathbf{T}_1 \circ \mathbf{T}_2 = \mathbf{T}_2 \circ \mathbf{T}_1$ ,
- $\mathbf{T}_1 \circ \mathbf{T}_2 \neq \mathbf{T}_2 \circ \mathbf{T}_1$ .

**Pr. M** Nápište maticové vyjadrenie rovinatej transformácie, ktorá zodpovedá súmernosti vzhľadom na priamku

$$p : \sqrt{3}x - y + 4 = 0.$$

a nájdite obraz trojuholníka  $A = (0, 0)^\top, B = (-1, 0)^\top, C = (0, 2)^\top$ .

*Návod:* Súmernosť zapíšte ako zloženie „základných“ transformácií (podobne ako pri rotáciách vzhľadom na všeobecný bod). Súmernosťou vzhľadom na priamku  $p$  rozumieme také zobrazenie, ktoré bodu  $X$  priradí bod  $X'$  tak, že pre priamku  $r$  máme  $X, X' \in r, r \perp p$  a  $|Xp| = |X'p|$ .

**Pr. N** Rozhodnite, či nasledovné zobrazenia sú afinné. Svoje tvrdenie zdôvodnite:

1.  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y)^\top \mapsto (x - 3y, y + 1)^\top$ ,
2.  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y, z)^\top \mapsto (0, x + y + z)^\top$ ,
3.  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y)^\top \mapsto (\cos x, \sin y)^\top$ ,
4.  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4, (x, y)^\top \mapsto (x, y, x + y, x - y)^\top$ ,
5.  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, x \mapsto (x, x^2, x^3)^\top$ .

**Pr. O** Rozhodnite, či nasledovné afinné zobrazenia sú afinné transformácie. Svoje tvrdenie zdôvodnite:

1.  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y)^\top \mapsto (x - 3y, y - 1)^\top$ ,
2.  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y)^\top \mapsto (x - 3y + 2, -2x + 6y + 1)^\top$ ,