Afinné a konvexné kombinácie – príklady

Pr. A Uvažujme trojicu bodov $A, B, C \in \mathbb{R}^2$ so súradnicami

$$A = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Zapíšte body $E, F, G, H \in \mathbb{R}^2$ ako afinné kombinácie bodov A, B, C, ak

$$E = \begin{pmatrix} 5/2 \\ -3/2 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} -7/5 \\ 12/5 \end{pmatrix}.$$

Pr. B Uvažujme štvoricu bodov $A, B, C, D \in \mathbb{R}^3$ so súradnicami

$$A = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Zapíšte body $E, F, G \in \mathbb{R}^3$ ako afinné kombinácie bodov A, B, C, D, ak

$$E = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} -4/3 \\ 4/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}.$$

Pr. C Nech body $A, ..., F \in \mathbb{R}^2$ majú súradnice

$$A = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

1. Zapíšte bod F ako afinnú kombináciu bodov A, B, C, D.
2. Zapíšte bod F ako afinnú kombináciu bodov A, B, C, E.

Pr. D Nech teraz navyše $\mathbb{R}^2$ je euklidovský (so štandardným skalárnym súčinom). Pre jednoduchosť, uvažujme že bod $P \in \mathbb{R}^2$ leží vnútri trojuholníka $\triangle ABC$, daného vrcholmi $A, B, C \in \mathbb{R}^2$ a označme jeho dĺžky strán ako $a = |BC|$, $b = |CA|$, $c = |AB|$. Ďalej, označme $P = (r, s, t)^\top$ barycentrické súradnice bodu P vzhľadom na $\triangle ABC$.

1. Dokážte, že
$$r = \frac{\text{area}(\triangle BCP)}{\text{area}(\triangle ABC)}, \quad s = \frac{\text{area}(\triangle CAP)}{\text{area}(\triangle ABC)}, \quad t = \frac{\text{area}(\triangle ABP)}{\text{area}(\triangle ABC)}.$$
2. Dokážte, že
$$r = \frac{a}{a+b+c}, \quad s = \frac{b}{a+b+c}, \quad t = \frac{c}{a+b+c}.$$
3. Aplikujte oba postupy na výpočet barycentrických súradníc bodov E a F vzhľadom na $\triangle ABC$ (súradnice sú rovnaké ako v Príklade C).
4. $\star$ Vieme tieto vzťahy zovšeobecniť pre $\mathbb{R}^3$. Ak áno, ako?

Pr. E Označme stred úsečky XY ako M_{XY}. Dokážte, že ťažisko štvorstena $\boxtimes ABCD$ je totožné s priesečníkom úsečiek $M_{AB}M_{CD}$, $M_{AC}M_{BD}$ a $M_{AD}M_{BC}$.

Pr. F Nech body $A, B, C \in \mathbb{R}^2$ majú súradnice

$$A = \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} x_C \\ y_C \end{pmatrix}.$$

Dokážte, že A, B, C sú kolineárne práve vtedy, keď

$$\det \begin{pmatrix} x_A & x_B & x_C \\ y_A & y_B & y_C \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Pr. G Uvažujme trojuholník $\triangle ABC$ v $\mathbb{R}^2$. Nech M , N a P sú body na priamkach $\overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{CA}$ a $\overleftrightarrow{AB}$ (v tomto poradí) tak, že $M \neq C$, $N \neq A$, $P \neq B$. Označme barycentrické súradnice bodov M, N a P vzhľadom na $\triangle ABC$ nasledovne:

$$M = \begin{pmatrix} 0 \\ s_M \\ t_M \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} r_N \\ 0 \\ t_N \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} r_P \\ s_P \\ 0 \end{pmatrix}.$$

1. Dokážte **Menealovu vetu**: Body M, N, P sú kolineárne práve vtedy, keď

$$t_M r_N s_P + s_M t_N r_P = 0.$$

2. $\star$ Dokážte **Cevovu vetu**: Priamky $\overleftrightarrow{AM}$, $\overleftrightarrow{BN}$ a $\overleftrightarrow{CP}$ sa pretínajú v jedinom bode, alebo sú rovnobežné práve vtedy, keď

$$t_M r_N s_P - s_M t_N r_P = 0.$$

Pr. H Zistite, či množiny bodov $\mathcal{S}, ..., \mathcal{W}$ sú afinne nezávislé. Svoje tvrdenie zdôvodnite:

- $\mathcal{S} = \{A, B, C\} \subset \mathbb{R}^2$, kde $A = (5, -6)^\top$, $B = (-1, 3)^\top$ a $C = (-3, 6)^\top$,
- $\mathcal{T} = \{D, E, F\} \subset \mathbb{R}^2$, kde $D = (1, 1)^\top$, $E = (-2, 3)^\top$ a $F = (-3, 0)^\top$,
- $\mathcal{U} = \{G, H, I, J\} \subset \mathbb{R}^2$, kde $G = (1, -1)^\top$, $H = (0, -3)^\top$, $I = (-2, 0)^\top$ a $J = (3, 3)^\top$,
- $\mathcal{V} = \{K, L, M\} \subset \mathbb{R}^3$, kde $K = (6, 1, 0)^\top$, $L = (-2, 0, 1)^\top$ a $M = (1, 1, 1)^\top$,
- $\mathcal{W} = \{N, O, P, Q\} \subset \mathbb{R}^3$, kde $N = (-1, 2, 3)^\top$, $O = (0, 0, 0)^\top$, $P = (4, 2, 1)^\top$ a $Q = (-1, -2, -2)^\top$.

Pr. I Uvažujme body $A, P, Q, R \in \mathbb{R}^2$, ktorých súradnice v štandardnej súradnicovej sústave $\langle O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle$ sú

$$A = (2, 6)^\top, \quad P = (1, 1)^\top, \quad Q = (-1, -2)^\top \quad R = (4, 2)^\top.$$

Určte súradnice bodu A vzhľadom na repér $\langle P, Q, R \rangle$. Ako vyzerajú transformačné rovnice pre prechod zo súradnicovej sústavy $\langle O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle$ do sústavy $\langle P, Q, R \rangle$?

Pr. J K repéru $\langle P, Q, R \rangle$ z Príkladu I teraz uvažujme repér $\langle S, T, U \rangle$, kde karteziánske súradnice bodov $S, T, U \in \mathbb{R}^2$ sú nasledovné:

$$S = (0, 2)^\top, \quad T = (1, 2)^\top, \quad U = (2, 9)^\top.$$

Ako vyzerajú transformačné rovnice pre prechod zo súradnicovej sústavy $\langle P, Q, R \rangle$ do $\langle S, T, U \rangle$ a naopak?

Pr. K Zistite, či bod $P = (3, 3) \in \mathbb{R}^2$ leží v konvexnom obale množiny bodov $\{A, B, C, D\} \subset \mathbb{R}^2$, ak

$$A = (1, 1)^\top, \quad B = (6, 1)^\top, \quad C = (6, 4)^\top, \quad D = (1, 6)^\top.$$

Ak áno, vyjadrite bod P ako konvexnú kombináciu bodov A, B, C, D. Navyše koľkými spôsobmi to môžeme urobiť?

Pr. L Nájdite $\operatorname{conv}(\{E, F, G, H\})$, ak súradnice bodov $E, F, G, H \in \mathbb{R}^2$ sú

$$E = (1, 3)^\top, \quad F = (1, 5)^\top, \quad G = (-1, 1)^\top, \quad H = (2, 2)^\top.$$

Pr. M Pre množinu bodov $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^2$ s aspoň štyrmi bodmi ukážte, že $\mathcal{S}$ môže byť rozdelená na množiny $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$ tak, že $\operatorname{conv}(\mathcal{A}) \cap \operatorname{conv}(\mathcal{B}) \neq \varnothing$.

Pr. N $\star$ Ukážte, že $\operatorname{conv}(\mathcal{S})$ je konvexný mnohouholník s najmenším priemerom, ktorý obsahuje $\mathcal{S}$.

Pr. O $\star$ Ukážte, že $\operatorname{conv}(\mathcal{S})$ je konvexný mnohouholník s najmenším obsahom, ktorý obsahuje $\mathcal{S}$.