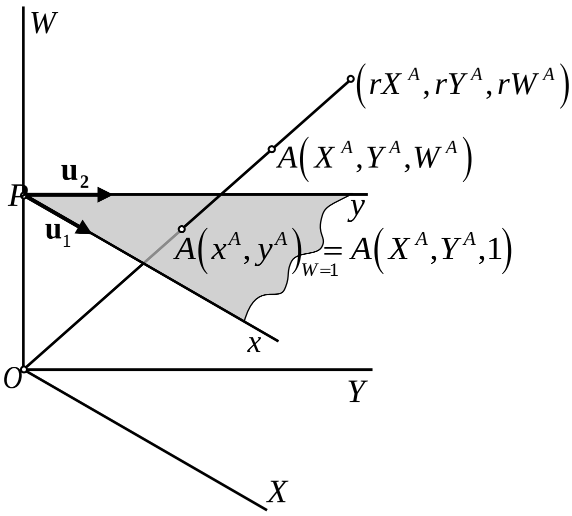
KONŠTRUKCIA RACIONÁLNYCH KRIVIEK

Doteraz sme pracovali s bodom A z priestoru E^2 resp. E^3, ktorý mal afinné súradnice (x, y) resp. (x, y, z) a teda aj bod na krivke $\mathbf{r}(t)$ sme opísali pomocou dvoch $x(t)$, $y(t)$ resp. troch $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ parametrických vyjadrení.

Pre zvýšenie možnosti modelovania kriviek sa zavádzajú pre bod reprezentovaný afinnými súradnicami jeho rozšírené afinné súradnice:

$(x, y) \rightarrow (X, Y, W)$ kde $x = \dfrac{X}{W}$, $y = \dfrac{Y}{W}$

resp. $(x, y, z) \rightarrow (X,Y,Z,W)$ kde $x = \dfrac{X}{W}$, $y = \dfrac{Y}{W}$, $z = \dfrac{Z}{W}$.

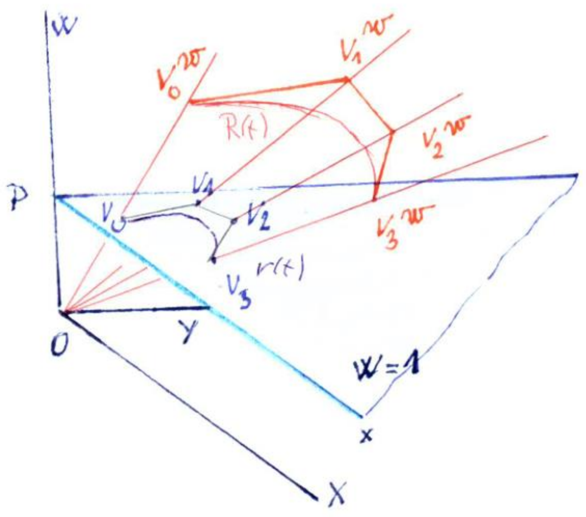


Táto algebrická konštrukcia sa vizualizuje ako stredový priemet bodu do nadroviny s rovnicou $W = 1$, kde stred premietania je začiatok súradnicovej sústavy $OXYW$ resp. $OXYZW$.

V súlade s touto konštrukciou budeme riadiacim bodom $\mathbf{V}_i$, $i = 0,\dots,n$, pridávať ich **váhy** w_i, $i = 0,\dots,n$, t .j.

$$\mathbf{V}_i^w = (w_i X_i, w_i Y_i, w_i) = (w_i \mathbf{V}_i, w_i) \text{ resp. } \mathbf{V}_i^w = (w_i X_i, w_i Y_i, w_i Z_i, w_i) = (w_i \mathbf{V}_i, w_i)\,.$$

Krivky sme vytvárali ako kombinácie riadiacich bodov $\mathbf{V}_i$, $i = 0,\dots,n$, a zmiešavacích funkcií $T_i(t)$, $i = 0,\dots,n$, v priestore E (E^2, E^3).



Teraz opíšeme krivku v priestore E^4 nasledovne:

$$\mathbf{r}^w(t) = \mathbf{R}(t) = \sum_{i=0}^{n} \mathbf{V}_i^w T_i(t)\,,$$

čo rozpíšeme pomocou súradníc: $X(t) = \sum_{i=0}^{n} w_i X_i T_i(t)$,

$$Y(t) = \sum_{i=0}^{n} w_i Y_i T_i(t)\,,$$

$$Z(t) = \sum_{i=0}^{n} w_i Z_i T_i(t)\,,$$

$$W(t) = \sum_{i=0}^{n} w_i T_i(t)\,.$$

Tak ako pri konštrukcii bodu sme určili jeho stredový priemet do nadroviny s rovnicou $W = 1$, to urobíme aj s „celou“ krivkou $\mathbf{R}(t)$ t. j. s každým jej bodom:

$$x(t) = \frac{X(t)}{W(t)} = \frac{\sum_{i=0}^{n} w_i X_i T_i(t)}{\sum_{i=0}^{n} w_i T_i(t)}\,,\; y(t) = \frac{Y(t)}{W(t)} = \frac{\sum_{i=0}^{n} w_i Y_i T_i(t)}{\sum_{i=0}^{n} w_i T_i(t)}\,,\; z(t) = \frac{Z(t)}{W(t)} = \frac{\sum_{i=0}^{n} w_i Z_i T_i(t)}{\sum_{i=0}^{n} w_i T_i(t)}\,,$$

čo môžeme zapísať:

$$\mathbf{r}(t) = \frac{\mathbf{R}(t)}{W(t)} = \frac{\sum_{i=0}^{n} w_i \mathbf{V}_i T_i(t)}{\sum_{i=0}^{n} w_i T_i(t)} = \frac{T_0(t) w_0}{\sum_{i=0}^{n} w_i T_i(t)} \mathbf{V}_0 + \frac{T_1(t) w_1}{\sum_{i=0}^{n} w_i T_i(t)} \mathbf{V}_1 + \ldots\ldots + \frac{T_n(t) w_n}{\sum_{i=0}^{n} w_i T_i(t)} \mathbf{V}_n =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} R_i(t) \mathbf{V}_i \quad \text{kde} \quad R_i(t) = \frac{T_i(t) w_i}{\sum_{i=0}^{n} w_i T_i(t)}\,.$$

Krivka $\mathbf{r}(t)$ je určená pomocou racionálnych polynómov t .j**. algebrického podielu dvoch polynomických funkcií R**(t) a $W(t)$. Polynómy $R_i(t)$ sú racionálne, preto názov **<u>racionálne rozšírenie kriviek – racionálne krivky.</u>**

Pri vizualizácii teda môžeme považovať racionálnu krivku $\mathbf{r}(t)$, že je stredový priemet neracionálnej - celistvej (integral) krivky $\mathbf{R}(t)$ do nadroviny s rovnicou $W = 1$.

Racionálne Bezierove krivky $n°$

Dané sú riadiace body $\mathbf{V}_i$,$i = 0,...,n$, $\mathbf{V}_i(x_i, y_i, z_i)$ a ich váhy w_i, $w_i > 0$, $i= 0,...,n$, teda ich rozšírené afinné súradnice: $\mathbf{V}_i^w = (w_i x_i, w_i y_i, w_i z_i, w_i) = (w_i \mathbf{V}_i, w_i)$.

Racionálna Bezierova krivka je určená predpisom: $\mathbf{r}(t) = \dfrac{\sum_{i=0}^n w_i \mathbf{V}_i B_{in}(t)}{\sum_{i=0}^n w_i B_{in}(t)} =$

$\sum_{i=0}^n R_{in}(t)\mathbf{V}_i$ kde $R_{in}(t) = \dfrac{B_{in}(t) w_i}{\sum_{i=0}^n w_i B_{in}(t)}$

sú racionálne polynómy a funkcie $B_{in}(t)$ sú Bernsteinove polynómy $n°$.

Vlastnosti racionálnych funkcií $R_{in}(t)$

- <u>nezápornosť</u> : $R_{in}(t) \geq 0$, pre všetky $i, n, t \in \langle 0,1 \rangle$, ak $w_i > 0$
- <u>rozklad jednotky</u>: $\sum_{i=0}^n R_{in}(t) = 1, \quad t \in \langle 0,1 \rangle$
- $R_{0n}(0) = 1, \quad R_{in}(0) = 0$ pre $i = 1,...,n \qquad R_{nn}(1) = 1 \quad R_{in}(1) = 0$ pre $i = 0,...,n-1$
- $R_{in}(t)$ má jedno maximum na intervale $\langle 0,1 \rangle$
- $w_i = 1, \quad i = 0,...,n$, tak $R_{in}(t) = B_{in}(t)$ t. j. Bernsteinove polynómy sú špeciálny prípad racionálnych zmiešavacích funkcií $R_{in}(t)$.

Vlastnosti racionálnej Bezierovej krivky

- <u>vlastnosť konvexného obalu</u>:

  ak $w_i > 0$, $i= 0,...,n$, tak $\mathbf{r}(t) \in KO[\mathbf{V}_0,...,\mathbf{V}_n]$
- <u>invariantnosť vzhľadom na afinné transformácie</u>:

$$T\left(\frac{\sum_{i=0}^n B_{in}(t) w_i \mathbf{V}_i}{\sum_{i=0}^n B_{in}(t) w_i}\right) = \frac{\sum_{i=0}^n B_{in}(t) w_i T(\mathbf{V}_i)}{\sum_{i=0}^n B_{in}(t) w_i}$$

- <u>interpolácia krajných riadiacich bodov riadiaceho polygónu</u>:

$$\mathbf{r}(0) = \frac{\mathbf{R}(0)}{W(0)} = \frac{w_0 \mathbf{V}_0}{w_0} = \mathbf{V}_0 \qquad \mathbf{r}(1) = \frac{\mathbf{R}(1)}{W(1)} = \frac{w_n \mathbf{V}_n}{w_n} = \mathbf{V}_n$$

- <u>vektor 1.derivácie, vektor dotyčnice</u>:

$$[\mathbf{r}(t)]' = \left[\frac{\mathbf{R}(t)}{W(t)}\right]' = \frac{\mathbf{R}'(t)}{W(t)} - \mathbf{r}(t)\frac{W'(t)}{W(t)}$$

V krajných bodoch:

začiatok: $\mathbf{r}'(0) = n\dfrac{w_1}{w_0}(\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_0)$

koniec: $\mathbf{r}'(1) = n\dfrac{w_{n-1}}{w_n}(\mathbf{V}_n - \mathbf{V}_{n-1})$.

Racionálne Bezierove kubiky n = 3

Dané sú riadiace body $\mathbf{V}_i$,i = 0,1,2,3 a ich váhy w_i, $w_i > 0$, i = 0,1,2,3.

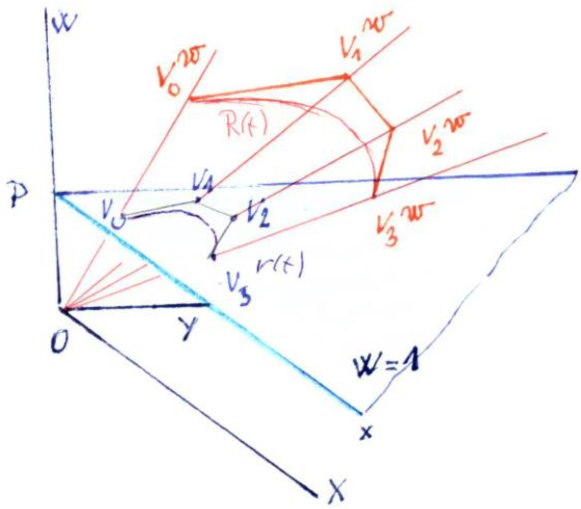
Racionálna Bezierova kubika je určená:

$$\mathbf{r}(t) = \frac{\sum_{i=0}^{3} w_i \mathbf{V}_i B_{i3}(t)}{\sum_{i=0}^{3} w_i B_{i3}(t)} = \sum_{i=0}^{3} R_{i3}(t)\mathbf{V}_i \,,$$

pre ktorú $\mathbf{r}(0) = \mathbf{V}_0$, $\mathbf{r}(1) = \mathbf{V}_3$ a $\mathbf{r}'(0) = 3\frac{w_1}{w_0}(\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_0)$, $\mathbf{r}'(1) = 3\frac{w_2}{w_3}(\mathbf{V}_3 - \mathbf{V}_2)$.

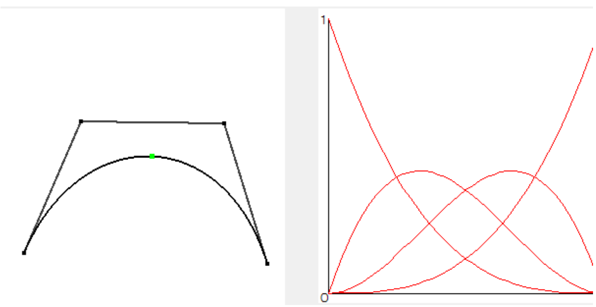
Váhy w_i, $w_i > 0$, $i = 0,1,2,3$, reprezentujú tvarovací parameter.

Modelovanie racionálnej Bezierovej kubiky

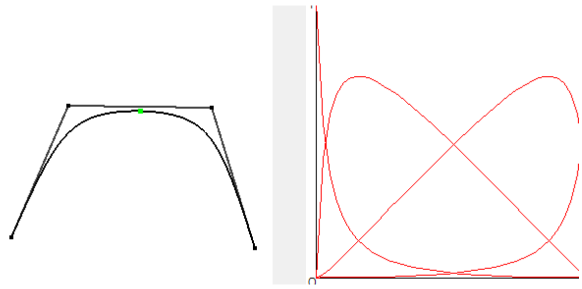


Váhy w_i, $w_i > 0$, $i = 0,1,2,3$, reprezentujú tvarovací parameter.

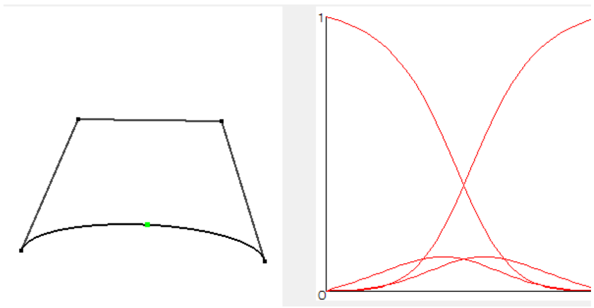
$w_0 : w_1 : w_2 : w_3 = 1:1:1:1$ Bezierova kubika (integral)



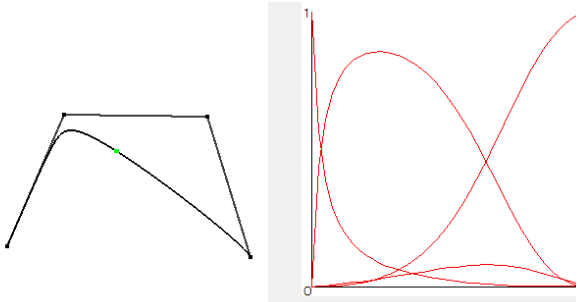
$w_0 : w_1 : w_2 : w_3 = 1:10:10:1$ priťahovaná k riadiacim bobom $\mathbf{V}_1$, $\mathbf{V}_2$



$w_0 : w_1 : w_2 : w_3 = 10:1:1:10$ odtláčaná od riadiacich bodov **V**$_1$, **V**$_2$



$w_0 : w_1 : w_2 : w_3 = 1:10:1:10$ priťahovaná k riadiacemu bodu **V**$_1$, odtláčaná od bodu **V**$_2$



Racionálne Bezierove kvadratické krivky n = 2

Dané sú riadiace body $\mathbf{V}_i$,i = 0,1,2 , a ich váhy w_i, i = 0,1,2.

Racionálna Bezierova kvadratická krivka je určená:

$$\mathbf{r}(t)=\frac{\sum_{i=0}^{2} w_i \mathbf{V}_i B_{i2}(t)}{\sum_{i=0}^{2} w_i B_{i2}(t)}=\frac{(1-t)^2 w_0 \mathbf{V}_0+2t(1-t)w_1\mathbf{V}_1+t^2 w_2 \mathbf{V}_2}{(1-t)^2 w_0+2t(1-t)w_1+t^2 w_2}$$

Každá krivka parametrizovaná v kvadratickom racionálnom Bezierovom tvare je kužeľosečka. Typ kužeľosečky môžeme určiť pomocou menovateľa:

$$W(t)=(1-t)^2 w_0+2t(1-t)w_1+t^2 w_2=(w_0-2w_1+w_2)t^2+2(w_1-w_0)t+w_0=0\,.$$

Korene rovnice $t_{12}=\dfrac{(w_0-w_1)\pm\sqrt{w_1^{\,2}-w_2w_0}}{w_0-2w_1+w_2}$ a typ kužeľosečky:

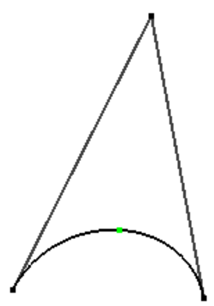
Ak : $w_1^{\,2}-w_2w_0<0$, tak elipsa

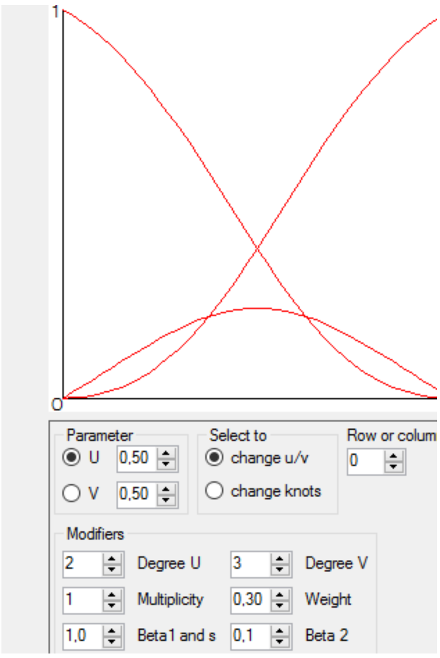
$w_1^{\,2}-w_2w_0=0$, tak parabola

$w_1^{\,2}-w_2w_0>0$, tak hyperbola.

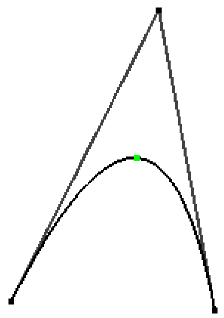
Z používateľského hľadiska je výhodné voliť $w_0 = w_2 = 1$, potom pre váhu w_1:

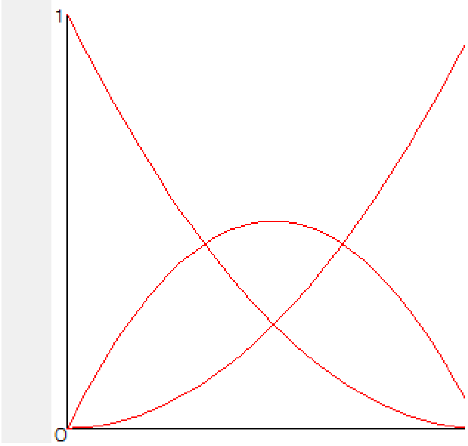
- $w_1^2 < 1 \Rightarrow$ elipsa,



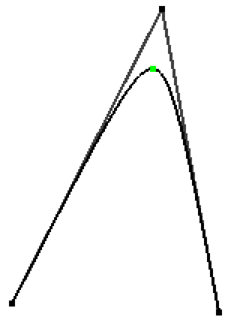


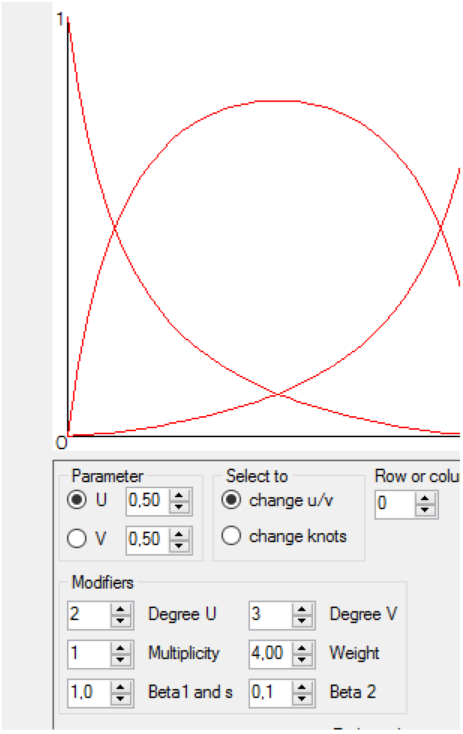
- $w_1^2 = 1 \Rightarrow$ parabola





- $w_1^2 > 1 \Rightarrow$ hyperbola.





- $w_1 = 0$ krivka je úsečka $\mathbf{V}_0\mathbf{V}_2$

- $w_1 < 0$ vyvoláva singularity, výhodné je použiť pri „celej“ krivke (elipse).

Voľba váhy w_1 pre jednotlivé kužeľosečky nie je pre dizajnérov vhodným nástrojom. Pre nich je výhodnejšie zvoliť kužeľosečku výberom „tretieho“ bodu napr. $t = \frac{1}{2}$:

$$\mathbf{r}(\tfrac{1}{2}) = \frac{\mathbf{R}(\frac{1}{2})}{W(\frac{1}{2})} = \frac{\frac{1}{2}(\mathbf{V}_0 + \mathbf{V}_2) + w_1\mathbf{V}_1}{1+w_1} = \frac{1}{1+w_1}\mathbf{M} + \frac{w_1}{1+w_1}\mathbf{V}_1.$$

Označme $\frac{w_1}{1+w_1} = s$, tento parameter vyjadruje lineárnu interpoláciu medzi bodmi **M** a $\mathbf{V}_1$:

$$\mathbf{r}(\tfrac{1}{2}) = (1-s)\mathbf{M} + s\mathbf{V}_1 = \mathbf{S} \quad \textbf{SHOULDER POINT}$$

a je vhodný nástroj pre dizajnéra, ktorý pohybom bodu **M** do $\mathbf{V}_1$:

- $s = 0$ – úsečka $\mathbf{V}_0\mathbf{V}_2$
- $0 < s < \frac{1}{2}$ - elipsa
- $s = \frac{1}{2}$ - parabola
- $\frac{1}{2} < s < 0$ – hyperbola.

Segment kružnice: je špeciálnym prípadom elipsy pre $w_1 < 1$ a dosiahneme pre rovnoramenný trojuholník $V_0V_1V_2$, váhy $w_0 = w_2 = 1$, váha $w_1 = \cos\theta$, kde θ je uhol pri V_0 a V_2. Pre $\theta = 45°$ je $w_1 = 0.7$ a $\theta = 60°$ je $w_1 = 0.5$.