

Kapitola 1

Jednoduché oblúky

1.1 Matematické reprezentácie kriviek

Medzi štandardné metódy reprezentácie kriviek v geometrickom modelovaní sa zaraďujú opisy pomocou implicitných rovníc, explicitných vyjadrení a parametrických funkcií.

Implicitná krivka v rovine \mathbb{E}^2 so súradnicovou sústavou $\langle O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle$ je zadaná nasledovne. Uvažujme funkciu $g : \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Potom *implicitnou krivkou* nazývame množinu

$$\mathcal{Z}(g) = \left\{ (x, y) \in \mathbb{E}^2 \mid g(x, y) = 0 \right\}. \quad (1.1)$$

Rovnica $g(x, y) = 0$ vyjadruje vzťah medzi súradnicami x a y bodov ležiacich na krivke.

Pri *explicitnom vyjadrení* je krivka v rovine \mathbb{E}^2 reprezentovaná ako graf funkcie $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, t. j. $y = g(x)$. V praxi častokrát uvažujeme špeciálnu skupinu funkcií g tvaru

$$g(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_px^p = \sum_{i=0}^p a_ix^i, \quad (1.2)$$

kde $a_0, \dots, a_p \in \mathbb{R}$ a navyše $a_p \neq 0$. Krivku určenú týmto predpisom nazývame *algebraickou krivkou stupňa p* .

V *parametrickom vyjadrení* priestorovej krivky každú súradnicu x, y, z jej bodu reprezentujeme osobitne pomocou explicitnej funkcie jednej premennej t , ktorú nazývame *parameter*, čiže

$$\begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t) \\ z &= z(t), \quad t \in [t_{min}, t_{max}]. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Parametrické vyjadrenie umožňuje vyčísliť pre zvolenú hodnotu parametra $t = t_0 \in [t_{min}, t_{max}]$ tri hodnoty $x(t_0)$, $y(t_0)$ a $z(t_0)$, ktoré určujú súradnice bodu krivky, odpovedajúceho hodnote parametra t_0 . Ak sú funkcie $x(t)$, $y(t)$ a $z(t)$ spojité, možno povedať, že príslušná krivka je spojitým obrazom súvislej oblasti $\Omega = [t_{min}, t_{max}] \subset \mathbb{R}$.

Parametrické vyjadrenie krivky možno nahradiť vektorou funkciou $\mathbf{r} : \Omega \rightarrow \mathbf{V}(\mathbb{R}^3)$, zadanú predpisom

$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))^T, \quad (1.4)$$

čo je obvyklý súradnicový zápis vektora.

V geometrickom modelovaní sa však namiesto vyjadrenia krivky pomocou vektorovej funkcie častejšie používa jej vyjadrenie v tvare *bodovej* funkcie. Ak si označíme ľubovoľný bod krivky ako $P(t)$, tak pre jeho polohový vektor $\mathbf{r}(t) = P(t) - O$ platí

$$P(t) = O + \mathbf{r}(t) = O + x(t)\mathbf{e}_1 + y(t)\mathbf{e}_2 + z(t)\mathbf{e}_3, \quad t \in [t_{min}, t_{max}]. \quad (1.5)$$

Táto rovnosť reprezentuje krivku ako bodovú funkciu $P : \Omega \rightarrow \mathbb{E}^3$. Súradnicový zápis bodovej funkcie P možno zapísať ako

$$P(t) = (x(t), y(t), z(t)). \quad (1.6)$$

V ďalšej časti sa budeme zaoberať štúdiom *kubických* polynomických kriviek, ktorých vektorovú reprezentáciu možno zapísať v tvare

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1 t + \mathbf{a}_2 t^2 + \mathbf{a}_3 t^3, \quad t \in [t_{min}, t_{max}] \quad (1.7)$$

a bodovú reprezentáciu ako

$$P(t) = O + \mathbf{a}_1 t + \mathbf{a}_2 t^2 + \mathbf{a}_3 t^3, \quad t \in [t_{min}, t_{max}], \quad (1.8)$$

kde $\mathbf{a}_i \in \mathbf{V}(\mathbb{E}^3)$ pre $i = 0, 1, 2, 3$.

Poznamenajme ešte, že zamlčaním z -ovej súradnice môžeme získať analogický opis parametrických kriviek v rovine \mathbb{E}^2 .

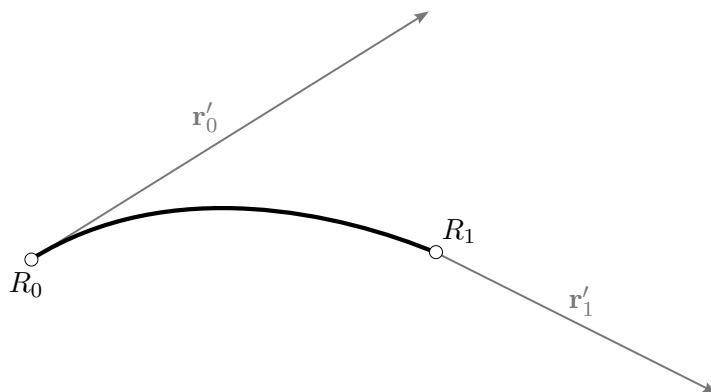
1.2 Metódy opisu kriviek

V geometrickom modelovaní sa stretávame s tromi ekvivalentnými metódami pre špecifikáciu jednotlivých typov reprezentácií kriviek:

1. *Sformulovanie podmienok*, ktoré sa pre krivku vyžadujú. Najčastejšie sú to krajné body krivky, sklony krivky v krajných bodoch (hodnoty prvých derivácií), prípadne geometrické vlastnosti určené deriváciami vyššieho rádu a pod.
2. *Voľba zmiešavacích funkcií*, reprezentujúcich krivku. Tieto funkcie zliepajú geometrické prvky do parametrického vyjadrenia segmentu krivky. V tomto prípade reprezentujeme bod krivky ako afinnú kombináciu geometrických prvkov a zmiešavacie funkcie zohrávajú úlohu koeficientov.
3. *Voľba matice koeficientov*, ktorá reprezentuje typ krivky. Daná matica vyjadruje polynomicke koeficienty ako afinné kombinácie vyššie spomenutých geometrických prvkov.

Na ilustráciu týchto troch metód opisu kriviek budeme predpokladať, že hodnoty $t_{min} = 0$ a $t_{max} = 1$, čiže jej parametrizácia bude

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1 t + \mathbf{a}_2 t^2 + \mathbf{a}_3 t^3, \quad t \in [0, 1]. \quad (1.9)$$



Obr. 1.1: Krivka definovaná koncovými bodmi R_0, R_1 a s nimi asociovanými dotykovými vektormi $\mathbf{r}'_0, \mathbf{r}'_1$.

1.3 Hermitove kubiky

Krivku $\mathbf{r}(t)$ môžeme zapísať v „pseudomaticovom” tvare

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1 t + \mathbf{a}_2 t^2 + \mathbf{a}_3 t^3 = \begin{pmatrix} 1 & t & t^2 & t^3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{a}_0 & \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 \end{pmatrix}^\top, \quad t \in [0, 1]. \quad (1.10)$$

Zápis krivky pomocou $\mathbf{a}_0, \dots, \mathbf{a}_3$ má hlavnú nevýhodu v tom, že nepoznáme geometrický význam týchto koeficientov a najmä ich vzťah ku krivke. Preto je výhodnejšie zadávať túto krivku jej krajnými bodmi $R_0, R_1 \in \mathbb{E}^3$ a dotykovými vektormi (sklonmi) $\mathbf{r}'_0, \mathbf{r}'_1 \in \mathbf{V}(\mathbb{E}^3)$, asociovanými s krajnými bodmi R_0 a R_1 , viď Obr. 1.1.

Našou úlohou je napísať parametrické vyjadrenie kubickej krivky, určenej vstupnými dátami R_0, R_1, \mathbf{r}'_0 a \mathbf{r}'_1 . Uvedomme si, že prvú deriváciu vektorovej funkcie $\mathbf{r}(t)$ môžeme vyjadriť ako

$$\mathbf{r}'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2t & 3t^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{a}_0 & \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 \end{pmatrix}^\top. \quad (1.11)$$

Ak do vzťahov (1.10) a (1.11) dosadíme pre parameter t krajné hodnoty intervalu $[0, 1]$ a zohľadníme pozíciu, do ktorej sme nominovali R_0, R_1, \mathbf{r}'_0 a \mathbf{r}'_1 , dostaneme

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(0) &= R_0, & \mathbf{r}'(0) &= \mathbf{r}'_0, \\ \mathbf{r}(1) &= R_1, & \mathbf{r}'(1) &= \mathbf{r}'_1, \end{aligned} \quad (1.12)$$

z čoho po dosadení dostaneme

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_0 &= R_0, & \mathbf{a}_1 &= \mathbf{r}'_0, \\ \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 &= R_1, & \mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2 + 3\mathbf{a}_3 &= \mathbf{r}'_1. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Potom z uvedených rovníc vieme vyjadriť

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_0 &= R_0, \\ \mathbf{a}_1 &= \mathbf{r}'_0, \\ \mathbf{a}_2 &= 3(R_1 - R_0) - 2\mathbf{r}'_0 - \mathbf{r}'_1, \\ \mathbf{a}_3 &= 2(R_0 - R_1) + \mathbf{r}'_0 + \mathbf{r}'_1\end{aligned}\tag{1.14}$$

a krivku $\mathbf{r}(t)$ teda môžeme prepísať ako

$$\begin{aligned}\mathbf{r}(t) &= \begin{pmatrix} 1 & t & t^2 & t^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_0 \\ \mathbf{r}'_0 \\ 3(R_1 - R_0) - 2\mathbf{r}'_0 - \mathbf{r}'_1 \\ 2(R_0 - R_1) + \mathbf{r}'_0 + \mathbf{r}'_1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & t & t^2 & t^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_0 \\ R_1 \\ \mathbf{r}'_0 \\ \mathbf{r}'_1 \end{pmatrix} =: \mathbf{TM}_H \mathbf{G}_H.\end{aligned}\tag{1.15}$$

Použitím zavedeného označenia $\mathbf{r}(t) =: \mathbf{TM}_H \mathbf{G}_H$ dostávame hľadané *maticové vyjadrenie* kubického segmentu (1.10) pomocou *geometrických prvkov* - krajných bodov R_0, R_1 a im prislúchajúcich dotykových vektorov \mathbf{r}'_0 a \mathbf{r}'_1 . Tieto sú uložené v tzv. *geometrickej matici* \mathbf{G}_H . Matica \mathbf{M}_H sa nazýva *matica Hermitových koeficientov*.

Ak vynásobíme matice \mathbf{T} a \mathbf{M}_H , dostaneme riadkovú maticu

$$\begin{pmatrix} 1 - 3t^2 + 2t^3 & 3t^2 - 2t^3 & t - 2t^2 + t^3 & -t^2 + t^3 \end{pmatrix}.\tag{1.16}$$

Označme prvky tejto matice ako

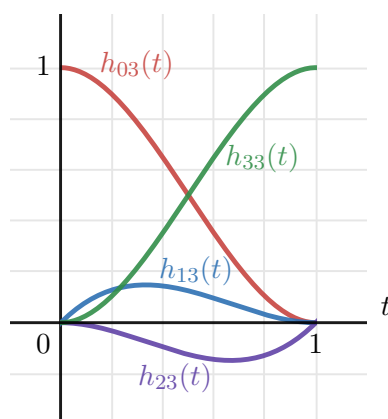
$$h_{03}(t) := 1 - 3t^2 + 2t^3, \quad h_{33}(t) := 3t^2 - 2t^3, \quad h_{13}(t) := t - 2t^2 + t^3, \quad h_{23}(t) := -t^2 + t^3.\tag{1.17}$$

Funkcie $h_{i3}(t)$, $i = 0, \dots, 3$ (Obr. 1.2) nazývame *zmiešavacie funkcie* (angl. *blending functions*). Potom parametrická reprezentácia krivky (1.10), označme ju $H(t)$, s využitím zmiešavacích funkcií má zápis

$$H(t) = h_{03}(t)R_0 + h_{13}(t)\mathbf{r}'_0 + h_{23}(t)\mathbf{r}'_1 + h_{33}(t)R_1, \quad t \in [0, 1].\tag{1.18}$$

Túto reprezentáciu segmentu kubickej krivky do literatúry zaviedol *James Ferguson* (1963). Polynómy $h_{i3}(t)$, $i = 0, \dots, 3$ nesú názov podľa francúzskeho matematika *Charlesa Hermita* (19. storočie), ktorý ich použil k interpolácii funkcií. Hovoríme teda o *Hermitových kubických polynómoch*.

Nakoľko krivka $H(t)$ interpoluje krajné body a zadané vektory v tom zmysle, že sú hodnotami jej derivácie v krajných bodoch definičného oboru, nazývame ju *Hermitovou kubickou interpolačnou krivkou*, skrátene *Hermitovou* či *Fergusonovou kubikou*.



Obr. 1.2: Zmiešavacie funkcie – Hermitove kubické polynómy – pre hodnoty $t \in [0, 1]$.

1.3.1 Vlastnosti a modelovanie Hermitových kriviek

Všimnime si, že pre zmiešavacie funkcie (1.17) platí $h_{03}(t) + h_{33}(t) = 1$. Zrejme teda bod $T := h_{03}(t)R_0 + h_{33}(t)R_1$ leží na úsečke R_0R_1 . Bod Hermitovej krivky, prislúchajúci pevne zvolenej hodnote parametra t , získame tak, že zodpovedajúci bod T posunieme o vektor $h_{13}(t)\mathbf{r}'_0 + h_{23}(t)\mathbf{r}'_1$.

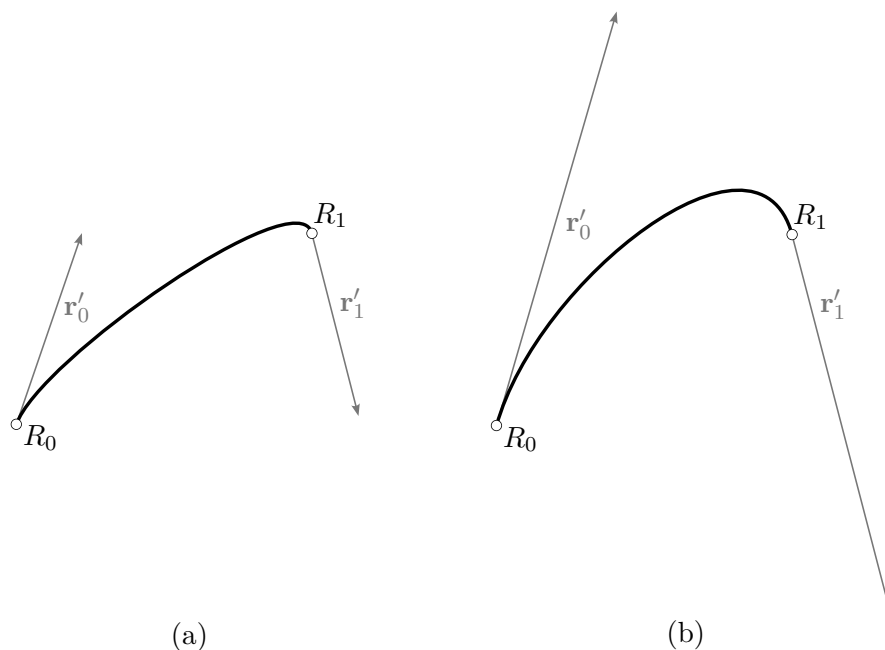
Zmena veľkosti a smeru dotykových vektorov

Položme $\mathbf{r}'_0 = \alpha_0\mathbf{d}_0$ a $\mathbf{r}'_1 = \alpha_1\mathbf{d}_1$, kde $\alpha_0, \alpha_1 \geq 0$ a $\mathbf{d}_0, \mathbf{d}_1$ sú jednotkové vektory. Potom, rovnomernou zmenou dĺžky dotykových vektorov (tzn. $\alpha_0 = \alpha_1$) ovplyvňujeme „ako dlho sleduje krivka dotyčnice“, pozri Obr. 1.3. Podobne môžeme veľkosť dotykových vektorov meniť nerovnomerne, t. j. položíme $\alpha_0 = k\alpha_1$, $k \neq 0$. Dôležité je uvedomiť si, že pokiaľ zvolíme $\alpha_0 = \alpha_1 = 0$, Hermitova kubika sa zdegeneruje na úsečku.

Neuniformovaná Hermitova kubika

Na začiatku sekcie sme skonštruovali Hermitovu kubiku, ktorá je definovaná nad intervalom $\Omega = [0, 1]$. Krivky tohto typu nazývame *uniformované*. Analogicky môžeme zostrojiť kubiku nad ľubovoľným intervalom $\Omega = [0, \delta]$, $\delta > 0$ a budeme hovoriť, že krivka je *neuniformovaná*. Dosadíme teda krajné hodnoty intervalu 0 a δ do vzťahov (1.10) a (1.11) a vyjadríme vstupnú dátovú štvoricu:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_0 &= R_0, & \mathbf{a}_1 &= \mathbf{r}'_0, \\ \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1\delta + \mathbf{a}_2\delta^2 + \mathbf{a}_3\delta^3 &= R_1, & \mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2\delta + 3\mathbf{a}_3\delta^2 &= \mathbf{r}'_1. \end{aligned} \quad (1.19)$$



Obr. 1.3: (a) Hermitova krivka s koeficientmi $\alpha_0 = \alpha_1$. (b) Hermitova krivka s koeficientmi $2\alpha_0 = 2\alpha_1$.

Z nej môžeme vyjadriť vektory

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a}_0 &= R_0, \\
 \mathbf{a}_1 &= \mathbf{r}'_0, \\
 \mathbf{a}_2 &= \frac{3(R_1 - R_0)}{\delta^2} - \frac{2\mathbf{r}'_0}{\delta} - \frac{\mathbf{r}'_1}{\delta}, \\
 \mathbf{a}_3 &= \frac{2(R_0 - R_1)}{\delta^3} + \frac{\mathbf{r}'_0}{\delta^2} + \frac{\mathbf{r}'_1}{\delta^2}
 \end{aligned} \tag{1.20}$$

a vytvoriť maticový zápis

$$H(t) = \begin{pmatrix} 1 & t & t^2 & t^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{-3}{\delta^2} & \frac{3}{\delta^2} & \frac{-2}{\delta} & \frac{-1}{\delta} \\ \frac{2}{\delta^3} & \frac{-2}{\delta^3} & \frac{1}{\delta^2} & \frac{1}{\delta^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_0 \\ R_1 \\ \mathbf{r}'_0 \\ \mathbf{r}'_1 \end{pmatrix} \tag{1.21}$$

Rôzne hodnoty δ produkujú rôzne Hermitove kubiky. Možno povedať, že zväčšovanie hodnoty δ ťahá krivku v krajných bodoch v smere dotykového vektora. Preto v literatúre môžeme nájsť aj alternatívne vyjadrenie krivky

$$H(t) = \begin{pmatrix} 1 & t & t^2 & t^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_0 \\ R_1 \\ \delta\mathbf{r}'_0 \\ \delta\mathbf{r}'_1 \end{pmatrix} \tag{1.22}$$

Vyčísľovacie algoritmy

Výpočet bodov krivky spočíva v dosadyovaní hodnôt parametra t do vyjadrenia krivky $H(t)$ a následné spájanie vypočítaných bodov úsečkami. Najčastejšie uvažujeme rovnomerné navzorkovanie intervalu, t. j. vyčísľujeme hodnoty pre $t_i = i/k$, $i = 0, \dots, k$, kde k určuje veľkosť vzorky (dĺžku jedného dielika intervalu).

Najjednoduchšou metódou pre výpočet hodnôt polynómu pre t_i je použitie *Hornerovej schémy*, ktorá realizuje výpočty postupnou faktorizáciou. V našom prípade teda kubickú krivku pre hodnotu t_i môžeme postupne faktorizovať, čím dostaneme vyjadrenie

$$\mathbf{r}(t_i) = \mathbf{a}_0 + t_i (\mathbf{a}_1 + t_i (\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 t_i)). \quad (1.23)$$

Všimnime si, že vyčíslenie krivky pomocou vzťahu (1.23) vyžaduje menej násobení než pôvodné vyjadrenie (1.10).

1.3.2 Cvičenia – Hermitova kubika

- Napíšte parametrické vyjadrenie Hermitovej kubiky $H(t)$, $t \in [0, 1]$ a následne ich načrtnite, ak sú zadané nasledovné vstupné dátové štvorice:
 - $R_0 = (0, 0)^\top$, $R_1 = (1, 0)^\top$, $\mathbf{r}'_0 = (1, 1)^\top$, $\mathbf{r}'_1 = (0, -1)^\top$.
 - $R_0 = (0, 0, 0)^\top$, $R_1 = (1, 1, 1)^\top$, $\mathbf{r}'_0 = (1, 0, 0)^\top$, $\mathbf{r}'_1 = (0, 1, 0)^\top$.
 - V dátovej štvorici (a) použite $\mathbf{r}'_1 = (2, 2)^\top$ a krivky porovnajte.
 - V dátovej štvorici (a) uvažujte $t \in [0, 4]$.
- Uvažujme parametrické vyjadrenie Hermitovej kubiky $H(t)$, $t \in [0, 1]$ také, že

$$\begin{aligned} x(t) &= 1 + 2t + t^2 - t^3, \\ y(t) &= 3t - t^2. \end{aligned} \quad (1.24)$$

Určte vstupnú dátovú štvoricu.

- V cvičení 1. (a) určte vektory prvej a druhej derivácie pre bod krivky $H(1/3)$. Derivácie následne graficky ilustrujte.

1.4 Bézierove krivky

Pri Hermitových kubikách vieme modifikovať pozíciu krajných bodov a meniť smery a dĺžky príslušných dotkových vektorov, čím intuitívne vieme modelovať kubickú krivku tak, aby zodpovedala našim požiadavkám. Hermitove kubiky avšak trpia problémom, že nevieme výraznejšie ohraničiť oblasť, v ktorej krivka leží.

Za opísanie kriviek, ktoré ležia v ohraničenej oblasti vďačíme automobilovému priemyslu. V roku 1959 zostrojil *Paul de Casteljau* – francúzsky matematik a fyzik, pracujúci pre Citroën – algoritmus na vyčísľovanie určitej triedy kriviek. O ich popularizáciu a formalizáciu sa postaral francúzsky inžinier *Pierre Bézier*, ktorý pracoval v automobilke Renault. Nakoľko si daný typ kriviek (a plôch) nechal patentovať, spomínané krivky nesú jeho meno – *Bézierove krivky*. Od týchto čias sú Béziérove krivky štandardným a azda najpoužívanejším typom kriviek v počítačovo riadenom dizajnovaní (angl. *computer aided design*, skr. CAD), počítačovo riadenej

výrobe (angl. *computer aided manufacturing/machining*, skr. CAM) a v neposlednom rade aj počítačovej grafike.

1.4.1 Bernsteinove polynómy a ich vlastnosti

Na konštrukciu Bézierových kriviek potrebujeme najprv opísať bázu vektorového priestoru všetkých polynómov stupňa n . Tieto polynómy nesú názov podľa ukrajinského matematika *Sergeia Bernsteina*, ktorý ich odvodil v roku 1912 pre svoj výskum v teórii aproximácie.

Definícia 1.4.1. Pod i -tým Bernsteinovým polynómom n -tého stupňa v premennej t rozumieme

$$b_{i,n}(t) := \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}. \quad (1.25)$$

Veta 1.4.2. Polynómy $b_{0,n}(t), \dots, b_{n,n}(t)$ tvoria bázu vektorového priestoru všetkých polynómov stupňa n .

Veta 1.4.3. Vlastnosti Bernsteinových polynómov:

Nezápornosť: $b_{i,n}(t) \geq 0$ pre ľubovoľné i , n a $t \in [0, 1]$.

Rozklad jednotky: $\sum_{i=0}^n b_{i,n}(t) = 1$.

Symetria: $b_{i,n}(1-t) = b_{n-i,n}(t)$, pre $i = 0, \dots, n$.

Rekurzia: $b_{i,n}(t) = (1-t)b_{i,n-1}(t) + tb_{i-1,n-1}(t)$, pre $i = 0, \dots, n$, kde $b_{-1,n-1}(t) = b_{n,n-1}(t) = 0$.

1. derivácia: $b'_{i,n}(t) = n(b_{i-1,n-1}(t) - b_{i,n-1}(t))$, kde $b_{-1,n-1}(t) = b_{n,n-1}(t) = 0$.

Lokálne maximum: polynóm $b_{i,n}(t)$ má na intervale $[0, 1]$ lokálne maximum pre hodnotu parametra $t = i/n$. Táto hodnota sa nazýva aj *Grevillova abscisa*.

1.4.2 Bézierove krivky a ich vlastnosti

Bézierovu krivku získame ako afinnú kombináciu bodov v priestore, kde koeficienty zodpovedajú hodnotám Bernsteinových polynómov.

Definícia 1.4.4. Uvažujme postupnosť bodov $V_0, \dots, V_n \in \mathbb{E}^m$, $m \geq 2$ a Bernsteinove polynómy $b_{0,n}(t), \dots, b_{n,n}(t)$ na intervale $t \in [0, 1]$. Potom množina bodov v \mathbb{E}^m , ktorých súradnice vyhovujú rovnici

$$B_n(t) = \sum_{i=0}^n b_{i,n}(t)V_i, \quad t \in [0, 1] \quad (1.26)$$

sa nazýva *Bézierova krivka n -tého stupňa*.

Skutočnosť, že bod krivky $B_n(t)$ je naozaj afinnou kombináciou bodov V_0, \dots, V_n , vyplýva z vlastnosti rozkladu jednotky pre Bernsteinove polynómy. Spomínanú postupnosť bodov V_0, \dots, V_n budeme ďalej nazývať *riadiacou lomenou čiarou*, alebo *riadiacim polygónom* krivky $B_n(t)$. Jednotlivým bodom V_i budeme hovoriť *riadiace vrcholy* krivky $B_n(t)$.

O najdôležitejších vlastnostiach Bézierovej krivky pojednáva nasledujúca veta.

Veta 1.4.5. Uvažujme Bézierovu krivku $B_n(t)$ podľa Definície 1.4.4. Potom platí:

Interpolácia krajných bodov: $B_n(0) = V_0$, $B_n(1) = V_n$.

Konvexný obal: Beziérová krivka $B_n(t)$ leží v konvexnom obale svojich riadiacich vrcholov V_0, \dots, V_n .

Invariantnosť vzhľadom na afinnú transformáciu riadiaceho polygónu: Nech $f : \mathbb{E}^m \rightarrow \mathbb{E}^m$ je afinná transformácia priestoru \mathbb{E}^m . Potom platí

$$f \left(\sum_{i=0}^n b_{i,n}(t) V_i \right) = \sum_{i=0}^n b_{i,n}(t) f(V_i). \quad (1.27)$$

Invariantnosť vzhľadom na transformáciu parametra:

$$\sum_{i=0}^n b_{i,n}(t) V_i = \sum_{i=0}^n b_{i,n} \left(\frac{u-a}{b-a} \right) V_i, \quad t \in [0, 1], \quad u \in [a, b]. \quad (1.28)$$

Symetrickosť:

$$\sum_{i=0}^n b_{i,n}(t) V_i = \sum_{j=0}^n b_{j,n}(1-t) V_{n-j}. \quad (1.29)$$

1. derivácia:

$$B'_n(t) = n \sum_{i=0}^{n-1} b_{i,n-1}(t) (V_{i+1} - V_i) =: n \sum_{i=0}^{n-1} b_{i,n-1}(t) \Delta V_i. \quad (1.30)$$

2. derivácia:

$$B''_n(t) = n(n-1) \sum_{i=0}^{n-2} b_{i,n-2}(t) (V_{i+2} - 2V_{i+1} + V_i). \quad (1.31)$$

Všimnime si, že derivácia Bézierovej krivky stupňa n je krivka stupňa $n-1$. Nie je to však bodová Bézierova krivka, ale *vektorová*, nakoľko jej riadiace prvky sú vektory $\mathbf{v}_i \in \mathbf{V}(\mathbb{E}^3)$. Krivky tohto typu nazývame *hodografmi* (tento názov zaviedol kalifornský matematik *Rida Farouki*, ktorý sa zaoberá výskumom pytagorejských hodografov). Hodografy môžeme vizualizovať tak, že zostrojíme Bézierovu krivku s riadiacimi vrcholmi $A + \mathbf{v}_0, \dots, A + \mathbf{v}_{n-1}$, kde $A \in \mathbb{E}^3$ je nejaký referenčný bod – zvyčajne uvažujeme $A = O$.

Ďalšou dôležitou vlastnosťou je *pseudolokálne riadenie* Bézierovej krivky. Vychádza z vlastnosti lokálneho maxima pre Bernsteinov polynóm $b_{i,n}(t)$. Nakoľko príslušný polynóm nadobúda lokálne maximum pre hodnotu $t_i = i/n$, pri zmene polohy vrchola V_i zmení krivka svoj tvar najbadateľnejšie v okolí, zodpovedajúcom parametru t_i . Je dôležité poznamenať, že pri tejto zmene sa zmení celý tvar krivky. Krivky tohto typu nazývame *globálne*. v

1.4.3 Bézierove kubiky

V nasledovnej časti si ukážeme súvis medzi Bézierovými a Hermitovými kubikami. Uvidíme, že ide o dve rôzne reprezentácie tej istej krivky.

Bézierovu kubiku máme zadanú predpisom

$$B_3(t) = b_{0,3}(t)V_0 + b_{1,3}(t)V_1 + b_{2,3}(t)V_2 + b_{3,3}(t)V_3, \quad t \in [0, 1] \quad (1.32)$$

a jej derivácia je

$$B_3'(t) = 3(b_{0,2}(t)(V_1 - V_0) + b_{1,2}(t)(V_2 - V_1) + b_{2,2}(t)(V_3 - V_2)). \quad (1.33)$$

Ak dosadíme hodnoty $t = 0$ a $t = 1$ do vyjadrení (1.32) and (1.33), dostaneme

$$B_3(0) = V_0, \quad B_3(1) = V_3, \quad B_3'(0) = 3(V_1 - V_0), \quad B_3'(1) = 3(V_3 - V_2). \quad (1.34)$$

Keďže $B_3(t)$ je kubická krivka, ľahko získame konverziu medzi radiaciami prvkami $R_0, R_1, \mathbf{r}'_0, \mathbf{r}'_1$ Hermitovej kubiky a radiaciami vrcholmi V_0, V_1, V_2, V_3 Bézierovej kubiky:

$$\begin{aligned} R_0 &= V_0, & R_1 &= V_3, & \mathbf{r}'_0 &= 3(V_1 - V_0), & \mathbf{r}'_1 &= 3(V_3 - V_2), \\ V_0 &= R_0, & V_1 &= R_0 + \frac{1}{3}\mathbf{r}'_0, & V_2 &= R_1 - \frac{1}{3}\mathbf{r}'_1, & V_3 &= R_1. \end{aligned} \quad (1.35)$$

Nato, aby sme získali maticové vyjadrenie Bézierovej kubiky, môžeme predošlé vyjadrenie dosadiť do geometrickej matice \mathbf{G}_H pre Hermitovu kubiku, t. j.:

$$\mathbf{G}_H = \begin{pmatrix} R_0 \\ R_1 \\ \mathbf{r}'_0 \\ \mathbf{r}'_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_0 \\ V_3 \\ 3(V_1 - V_0) \\ 3(V_3 - V_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_0 \\ V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix} \quad (1.36)$$

Po dosadení matice \mathbf{G}_H do vyjadrenia Hermitovej kubiky teda dostávame maticové vyjadrenie Bézierovej kubiky

$$B_3(t) = \mathbf{TM}_H \mathbf{G}_H = \begin{pmatrix} 1 & t & t^2 & t^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_0 \\ V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix} := \mathbf{TM}_B \mathbf{G}_B. \quad (1.37)$$

Uvedené úvahy nám ponúkajú aj vzťah medzi jednotlivými zmiešavacími funkciami:

$$\begin{aligned} h_{03}(t) &= b_{0,3}(t) + b_{1,3}(t), \\ h_{13}(t) &= \frac{1}{3}b_{1,3}(t), \\ h_{23}(t) &= -\frac{1}{3}b_{2,3}(t), \\ h_{33}(t) &= b_{2,3}(t) + b_{3,3}(t). \end{aligned} \quad (1.38)$$

1.4.4 Vyčísľovacie algoritmy

Podobne, ako v prípade Hermitových kubík, aj Beziérove krivky môžeme vyčísľovať dosadením konkrétnej hodnoty parametra t do predpisu krivky. Poznáme však aj efektívnejšie spôsoby vyčísľovania Bézierových kriviek.

De Casteljauov algoritmus

Ide o pôvodný návrh algoritmu Paula de Casteljau, ktorý ho zostrojil pre Citroën. Vychádza z rekurzívneho vyjadrenia Bernsteinovho polynómu $b_{i,n}(t) = (1-t)b_{i,n-1}(t) + tb_{i-1,n-1}(t)$.

Uvažujme Bézierovu krivku $B_n(t)$ s riadiacimi vrcholmi V_0, \dots, V_n . Pomocou týchto riadiacich vrcholov môžeme zostrojiť nasledovné rekurentné vyjadrenie.

$$\begin{aligned} V_i^0(t) &= V_i, \\ V_i^r(t) &= (1-t)V_i^{r-1}(t) + tV_{i+1}^{r-1}(t), \quad r = 1, \dots, n, \quad i = 0, \dots, n-r. \end{aligned} \quad (1.39)$$

Vidíme, že $V_i^r : [0, 1] \rightarrow \mathbb{E}^m$ sú bodové funkcie v jednom parametri t . Taktiež z predpisu vidíme, že pre každé $r = 1, \dots, n$ a prípustné i bod $V_i^r(t)$ leží na úsečke s krajnými bodmi $V_i^{r-1}(t)$ a $V_{i+1}^{r-1}(t)$, čiže ide o *lineárnu interpoláciu* týchto bodov pre nejakú hodnotu parametra t .

Takouto postupnou lineárnou interpoláciou vieme postupovať do chvíle, kým $r = n$ a i má jedinou prípustnú hodnotu $i = 0$. Viacerými spôsobmi je možné ukázať, že príslušný bod je bodom Bézierovej krivky pre hodnotu parametra t , t. j.

$$V_0^n(t) = B_n(t). \quad (1.40)$$

De Casteljauov algoritmus je možné prehľadne zapísať pomocou trojuholníkovej schémy. Nasledovný príklad zobrazuje takúto schému pre kubickú Bézierovu krivku $B_3(t)$ s riadiacimi vrcholmi V_0, V_1, V_2, V_3 , kde bod $V_0^3 = B_3(t)$ pre zvolenú hodnotu parametra t :

$$\begin{array}{ccccccc} & & V_0^0 & & V_1^0 & & V_2^0 & & V_3^0 \\ & & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow \\ & & & 1-t & & t & & 1-t & & t & & 1-t & & t \\ & & & \searrow & & \searrow & & \searrow & & \searrow & & \searrow & & \searrow \\ & & & & V_0^1 & & V_1^1 & & V_2^1 & & & & & \\ & & & & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & & & & \\ & & & & & 1-t & & t & & 1-t & & t & & \\ & & & & & \searrow & & \searrow & & \searrow & & \searrow & & \\ & & & & & & V_0^2 & & V_1^2 & & & & & \\ & & & & & & \swarrow & & \swarrow & & & & & \\ & & & & & & & 1-t & & t & & & & \\ & & & & & & & \searrow & & \searrow & & & & \\ & & & & & & & & V_0^3 & & & & & \end{array} \quad (1.41)$$

Pre r -tú deriváciu Bézierovej krivky vzhľadom na de Casteljauov algoritmus platí nasledovný vzťah:

$$\begin{aligned} B_n^{(r)}(t) &= \frac{n!}{(n-r)!} \sum_{i=0}^{n-r} b_{i,n-r}(t) \Delta^r V_i, \quad \Delta^r V_i = \sum_{j=0}^r (-1)^{r-j} \binom{r}{j} V_{i+j}, \\ B_n^{(r)}(t) &= \frac{n!}{(n-r)!} \Delta^r V_0^{n-r}(t). \end{aligned} \quad (1.42)$$

Z tohto vzťahu môžeme vyjadriť prvú deriváciu ako $B_n'(t) = n \Delta V_0^{n-1}(t) = n (V_1^{n-1}(t) - V_0^{n-1}(t))$. Inými slovami, dotykový vektor Bézierovej krivky je určený bodmi v predposlednom riadku de Casteljauovho algoritmu.

Podrozdelenie

Predošlý algoritmus nám umožňuje (výpočtovo) jednoduchšie vyčíslenie konkrétneho bodu krivky. Iné prístupe k vykreslovaniu krivky využívajú myšlienku, že ako grafickú reprezentáciu krivky vezmeme jej nejakú dobrú aproximáciu. My sa zameriame na aproximáciu krivky dostatočne jemnou lomenou čiarou, t. j. takou, ktorá obsahuje dostatočne veľký počet vrcholov, resp. dĺžka najdlhšej strany lomenej čiary je ohraničená dostatočne malým, vopred zvoleným $\varepsilon < 0$.

Medzi populárne metódy zjemňovania lomených čiar patrí *podrozdelenie* (angl. *subdivision*). Ako napovedá názov, jedná sa o rekurzívne delenie lomenej čiary na viacero „podčiar“ rovnakého typu. Pre prípad podrozdelenia na aproximáciu Bézierovej krivky $B_n(t)$ za vstupnú lomenú čiaru budeme brať jej riadiaci polygón. Pomocou de Casteljaouvo algoritmu môžeme vyčísliť krivku pre konkrétnu hodnotu parametra, ozn. $\alpha \in [0, 1]$. Keďže bod $V_0^n(\alpha)$ je bodom Bézierovej krivky $B_n(t)$, môžeme ju v tomto bode rozdeliť na dva segmenty, označme ich $B_n^1(t)$ a $B_n^2(t)$. Zo samotného algoritmu a jeho geometrického znázornenia vidíme, že jednotlivé segmenty sú Bézierove krivky na intervale $[0, 1]$ s nasledovnými riadiacimi vrcholmi:

$$\begin{aligned} B_n^1(t) &\rightsquigarrow V_0^0(\alpha), V_0^1(\alpha), \dots, V_0^n(\alpha), \\ B_n^2(t) &\rightsquigarrow V_0^n(\alpha), V_1^{n-1}(\alpha), \dots, V_n^0(\alpha). \end{aligned} \quad (1.43)$$

Samotným krokom podrozdelenia je teda rozdelenie vstupného riadiaceho polygónu na dva riadiace polygóny s rovnakým počtom vrcholov, ale kratšou dĺžkou jednotlivých strán. Rekurzia spočíva v opätovnom aplikovaní podrozdelenia na segmenty $B_n^1(t)$ a $B_n^2(t)$. V k -tej iterácii podrozdelenia dostávame lomenú čiaru s v_k vrcholmi, pričom $v_k = 2v_{k-1} - 1$ a $v_0 = n + 1$. To znamená, že každou iteráciou sa nám počet vrcholov lomenej čiary takmer zdvojnásobí, čiže konvergencia k limitnej (Bézierovej) krivke je rýchla. Aby sa lomené čiary podrozdelenovali na oboch stranách približne rovnakým tempom, v praxi používame najčastejšie deliacu hodnotu $\alpha = 1/2$.

Zvyšovanie stupňa

Myšlienka zvyšovania stupňa (angl. *degree elevation*) spočíva v pridaní riadiaceho vrchola bez zmeny tvaru krivky. Uvedomme si, že táto operácia je možná z dôvodu, že ľubovoľný polynóm n -tého stupňa môžeme zapísať ako polynóm $n + 1$ -ho stupňa tak, že koeficient pri t^{n+1} je nulový. Väčšie množstvo riadiacich vrcholov umožňuje jemnejšie dolaďovanie tvaru Bézierovej krivky.

Označme riadiace vrcholy Bézierovej krivky n -tého stupňa V_0, \dots, V_n a riadiace vrcholy rovnakej krivky ale $n + 1$ -ho stupňa (t. j. po zvýšení stupňa) ako W_0, \dots, W_{n+1} . Potom platí

$$\begin{aligned} W_0 &= V_0, \\ W_i &= \frac{i}{n+1} V_{i-1} + \left(1 - \frac{i}{n+1}\right) V_i, \quad i = 1, \dots, n, \\ W_{n+1} &= V_n. \end{aligned} \quad (1.44)$$

1.4.5 Cvičenia – Bézierova krivka

TBA.

Kapitola 2

Interpoláčn  splajny

Pojmom *splajn* (angl. *spline*) sa v projektovan  rozumie šablóna – ohybn  pr t, ktor  sa pou ival na vykreslovanie hladkých kriviek, prechádzajúcich predpísanou množinou bodov v rovine či priestore.

Pri matematickom opise takejto hladkej krivky sa vyu iva po častiach polynomick  krivka (najčastejšie tretieho stupňa), ktor  m  v spojoch (a teda všade) spojit  prv  a druh  deriváciu. Jednu časť takejto krivky nazývame *segment*. V bode, kde sa dva segmenty stretávajú, budeme požadovať splnenie predpísaných podmienok na hladkosť. Poznáme rôzne konštrukcie splajnových kriviek, ktor  sa líšia reprezentáciou jednotlivých segmentov a spomínanými podmienkami na hladkosť v spojoch.

Splajny sa tešia využitiu v rôznych oblastiach po ita ovej grafiky – navrhovanie kriviek s možnosťou lokálnej modifikácie, digitalizácia kresieb pre potreby ich uloženia, opis animačných dráh objektov a kamier. Taktiež, splajnov  krivky sú často vyu ivan  aj v CAD – návrhy karosérií automobilov, trupov lietadiel a lodí, automatick  vyrezávanie dielcov a ich rozmiestňovanie za čelom efektívneho využitia materiálu (CNC stroje).

Pri navrhovan  splajnov sa stretávame z dvojakým typom úloh:

1. *interpol chn  úloha* – krivka prechádza predpísanou skupinou bodov,
2. *aproxim chn  úloha* – krivka sa nachádza v dostatočnej blízkosti predpísaných bodov.

Hoci z matematického hľadiska sa interpol chn  úlohy riešia jednoduchšie, v praxi majú aproxi- ma n  úlohy v   i význam, keďže po ita ov  systémy pracujú s desatinnou aritmetikou. Preto sa najčastejšie stretávame s kompromisn m riešením, kde krivku konštruujeme tak, aby jej riadiaci polygón bol tvarou aproximáciou krivky.

Splajnov  krivku možno modifikovať prostredníctvom operácií na jej riadiacich vrcholoch. Zadan m dostatočného počtu riadiacich vrcholov dizajnér dokáže dostatočne presne opísať po adovan  tvar krivky a zmenou ich súradníc (posúvaním) ju doladiť. Taktiež, cel  krivku dokáže umiestniť na po adovan  miesto v rovine pomocou afinných transformácií.  ast  požiadavka na splajnov  krivku je, aby sa nachádzala vo svojom konvexnom obale, aby sa predišlo nežiaducim osciláciám.

2.1 Parametrick  a geometrick  spojitosť

Na zabezpečenie hladkého prechodu z jedného segmentu čiastkovej polynomickej krivky na druh y môžeme využit rôzne podmienky spojivosti v spojovacích bodoch segmentov. Ak i -ty segment krivky je opisan y bodovou parametrickou funkciou tvaru

$$X_i(u) = (x_i(u), y_i(u), z_i(u))^T, \quad u \in [u_i, u_{i+1}], \quad (2.1)$$

môžeme parametrick  spojitosť krivky zabezpečit stotožnením derivaci  podla parametra u funkcie $X_i(u)$ každých dvoch susediacich krivkových segmentov v ich spoločnom hraničnom bode.

Nech teda

$$\begin{aligned} X_0(u) &= (x_0(u), y_0(u), z_0(u))^T, \quad u \in [u_0, u_1], \\ X_1(v) &= (x_1(v), y_1(v), z_1(v))^T, \quad v \in [v_0, v_1]. \end{aligned} \quad (2.2)$$

V praktických aplikaciach najčastejšie pou ivame $[v_0, v_1] = [u_1, u_2]$, kde $u_0 < u_1 < u_2$.

Potom  iastkov  polynomick  krivka zlo en a zo segmentov $X_0(u)$ a $X_1(v)$ je

- C^0 -spojit  (parametrick  spojitosť 0. rádu), ak

$$X_0(u_1) = X_1(v_0), \quad \text{resp.} \quad x_0(u_1) = x_1(v_0), \quad y_0(u_1) = y_1(v_0), \quad z_0(u_1) = z_1(v_0), \quad (2.3)$$

- C^1 -spojit  (parametrick  spojitosť 1. rádu), ak platí podmienka (2.3) a navyše

$$X'_0(u_1) = X'_1(v_0), \quad \text{resp.} \quad x'_0(u_1) = x'_1(v_0), \quad y'_0(u_1) = y'_1(v_0), \quad z'_0(u_1) = z'_1(v_0). \quad (2.4)$$

- C^2 -spojit  (parametrick  spojitosť 2. rádu), ak platia podmienky (2.3), (2.4) a navyše

$$X''_0(u_1) = X''_1(v_0), \quad \text{resp.} \quad x''_0(u_1) = x''_1(v_0), \quad y''_0(u_1) = y''_1(v_0), \quad z''_0(u_1) = z''_1(v_0). \quad (2.5)$$

V prípade parametrickej spojivosti 2. rádu je rýchlosť zmeny dotykového vektora v spoji dvoch segmentov rovnak . Teda dotyčnica krivky hladko prechádza z jedného segmentu krivky na druh y. Ale pri spojivosti 1. rádu rýchlosť zmeny dotykového vektora môže byť na susedných segmentoch odli n , čiže vo všeobecnosti sa tvary dvoch segmentov krivky môžu v okolí ich spoločného bodu výrazne l i it. Spojitosť 1. rádu je často postačujúca pre digitalizaci  kresieb a niektor  dizajnerske aplikacie, zatiaľ čo spojitosť 2. rádu je u ito n a pri opise animačných dráh pre pohyb kamery.

Pri *geometrickej spojivosti* nevyžadujeme rovnosť derivaci  parametrických vyjadren  segmentov krivky v spojoch, ale iba ich úmernosť. Vďaka tomu z iskame tvarovacie parametre, ktorými môžeme ovplyvňovať tvar krivky.

Uvažujme teda segmenty $X_0(u)$ a $X_1(v)$, viď (2.2). Potom  iastkov  polynomick  krivka zlo en a zo segmentov $X_0(u)$ a $X_1(v)$ je

- G^0 -spojit  (geometrick  spojitosť 0. rádu), ak je C^0 -spojit , t. j. platí podmienka (2.3),
- G^1 -spojit  (geometrick  spojitosť 1. rádu), ak je G^0 -spojit  a navyše

$$\exists \beta_1 \in \mathbb{R}, \beta_1 > 0 : X'_1(v_0) = \beta_1 X'_0(u_1), \quad (2.6)$$

- G^2 -spojit  (geometrick  spojitosť 2. rádu), ak je G^0 -spojit  a G^1 -spojit  a navyše

$$\exists \beta_2 \in \mathbb{R} : X_1''(v_0) = \beta_1^2 X_0''(u_1) + \beta_2 X_0'(u_1). \quad (2.7)$$

Zo vzťahov (2.6) a (2.7) vidíme, že β_1 a β_2 sú spomínané tvarovacie parametre. Taktiež, podmienka (2.6) hovorí, že dotykové vektory v spoji sú lineárne závislé (nie nutne totožné), čiže segmenty majú v spoji spoločnú dotyčnicu. Geometrick  spojitosť 2. rádu znamená, že segmenty majú v spoločnom bode spojitý vektor krivosti.

2.2 Splajnové funkcie

Uvažujme postupnosť bodov $P_0, \dots, P_k \in \mathbb{E}^2$, $P_i = (x_i, y_i)^\top$ takú, že $x_0 < \dots < x_k$. Potom funkciu $f : [x_0, x_k] \rightarrow \mathbb{R}$ takú, že $f(x_i) = y_i$, $i = 0, \dots, k$, nazývame *po častiach polynomickej*, resp. *splajnovou funkciou* stupňa n , ak platí

$$f(x) = \begin{cases} p_0(x), & \text{ak } x \in [x_0, x_1] \\ \vdots & \\ p_{k-1}(x), & \text{ak } x \in [x_{k-1}, x_k] \end{cases}, \quad (2.8)$$

$$p_i^{(r)}(x_{i+1}) = p_{i+1}^{(r)}(x_{i+1}), \quad i = 0, \dots, k-2, \quad r = 0, \dots, n-1,$$

kde $p_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 0, \dots, k-1$ sú polynomicke funkcie stupňa n , čiže zohrávajú úlohu segmentov krivky $f(x)$. Hodnoty x_0, \dots, x_k , ktoré delia interval $[x_0, x_k]$ na k podintervalov nazývame *uzly*. Body P_0, \dots, P_k v tomto kontexte nazývame *spoje*.

2.2.1 Kubické splajnové funkcie

Opäť majme postupnosť bodov $P_0 = (x_0, y_0)^\top, \dots, P_k = (x_k, y_k)^\top \in \mathbb{E}^2$, kde $x_0 < \dots < x_k$. Nad touto postupnosťou uvažujme splajnov  funkciu $f(x)$, ktorej i -ty segment je kubická funkcia

$$p_i(x) = a_{i,0} + a_{i,1}(x - x_i) + a_{i,2}(x - x_i)^2 + a_{i,3}(x - x_i)^3, \quad a_{i,j} \in \mathbb{R}, \quad j = 0, 1, 2, 3. \quad (2.9)$$

Keďže každý polynóm $p_i(x)$ má štyri neznáme koeficienty $a_{i,0}, \dots, a_{i,3}$ a funkcia $f(x)$ je zložen  z k segmentov, potrebujeme určiť $4k$ polynomických koeficientov $a_{i,j}$, $i = 0, \dots, k-1$, $j = 0, 1, 2, 3$.

Splajnov  funkcia $f(x)$ má nasledovné vlastnosti:

- Funkcia $f(x)$ prechádza bodmi $P_0, \dots, P_k \rightsquigarrow k+1$ rovníc.
- Funkcia $f(x)$ je na intervale $[x_0, x_k]$ C^2 -spojit , čiže m  spojité derivácie rádu 0 aŹ 2 v $k-1$ spojoch $\rightsquigarrow 3(k-1)$ rovníc.

Z týchto podmienok vidíme, že pre $4k$ neznámych máme určených dokopy $4k-2$ lineárnych rovníc. Nato aby sme vedeli určiť všetky koeficienty jednoznačne, potrebujeme doplniť eše dve podmienky. Tie definujeme na krajných uzloch intervalu $[x_0, x_k]$ a preto ich nazývame *okrajov  alebo hraničné podmienky*. V aplikáciach sa stretávame s rôznymi variantmi okrajových podmienok, napríklad:

Fixovaný splajn (angl. *clamped spline*) – prvé derivácie v krajných uzloch sú pevne zvolené hodnoty

$$p'_0(x_0) = q_0, \quad p'_{k-1}(x_k) = q_k, \quad q_0, q_k \in \mathbb{R}. \quad (2.10)$$

Prirodzený splajn (angl. *relaxed spline*) – druhé derivácie v krajných uzloch sú nulové

$$p''_0(x_0) = 0, \quad p''_{k-1}(x_k) = 0. \quad (2.11)$$

Cyklický splajn – prvé a druhé derivácie v krajných uzloch sa rovnajú

$$p'_0(x_0) = p'_{k-1}(x_k), \quad p''_0(x_0) = p''_{k-1}(x_k). \quad (2.12)$$

Acyklický splajn – prvé a druhé derivácie v krajných uzloch sú opačné

$$p'_0(x_0) = -p'_{k-1}(x_k), \quad p''_0(x_0) = -p''_{k-1}(x_k). \quad (2.13)$$

Kvadratická podmienka – druhé derivácie v prvých a posledných dvoch uzloch sú rovnaké

$$p''_0(x_0) = p''_1(x_1), \quad p''_{k-1}(x_k) = p''_{k-2}(x_{k-1}). \quad (2.14)$$

Podmienka tretej derivácie – rovnosť tretích derivácií v druhom a predposlednom uzle

$$p_0^{(3)}(x_1) = p_1^{(3)}(x_1), \quad p_{k-1}^{(3)}(x_{k-1}) = p_{k-2}^{(3)}(x_{k-1}). \quad (2.15)$$

2.3 Hermitove kubické splajny

Uvažujme postupnosť bodov $R_0, \dots, R_k \in \mathbb{E}^m$. Zadané body chceme interpolovať krivkou – splajnom, ktorý je po častiach kubickou krivkou, zloženou z Hermitových segmentov

$$H_i(t) = h_{03}(t)R_i + h_{33}(t)R_{i+1} + h_{13}(t)\mathbf{r}'_i + h_{23}(t)\mathbf{r}'_{i+1}, \quad t \in [0, 1], \quad i = 0, \dots, k-1. \quad (2.16)$$

Na určenie jednotlivých segmentov je nutné a stačí poznať okrem bodov R_0, \dots, R_k aj dotykové vektory $\mathbf{r}'_0, \dots, \mathbf{r}'_k \in \mathbf{V}(\mathbb{E}^3)$. Tie určíme z podmienky parametrickej spojitosti 2. rádu, čiže v spojoch segmentov platí

$$H''_i(1) = H''_{i+1}(0), \quad i = 0, \dots, k-2. \quad (2.17)$$

Z vyjadrenia druhej derivácie Hermitovho segmentu

$$\begin{aligned} H''_i(t) &= h''_{03}(t)R_i + h''_{33}(t)R_{i+1} + h''_{13}(t)\mathbf{r}'_i + h''_{23}(t)\mathbf{r}'_{i+1} \\ &= (-6 + 12t)R_i + (6 - 12t)R_{i+1} + (-4 + 6t)\mathbf{r}'_i + (-2 + 6t)\mathbf{r}'_{i+1} \end{aligned} \quad (2.18)$$

dostávame

$$\begin{aligned} H''_i(1) &= 6(R_i - R_{i+1}) + 2\mathbf{r}'_i + 4\mathbf{r}'_{i+1}, \\ H''_{i+1}(0) &= 6(R_{i+2} - R_{i+1}) - 4\mathbf{r}'_{i+1} - 2\mathbf{r}'_{i+2}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Nakolko dva po sebe idúce segmenty sú v spoji C^1 -spojité, je potrebné dodržať už len C^2 -spojitosť v spojoch, čiže musí platiť

$$H_i''(1) = H_{i+1}''(0), \quad i = 0, \dots, k-2. \quad (2.20)$$

Z uvedenej podmienky teda dostaneme sústavu rovníc

$$\mathbf{r}'_i + 4\mathbf{r}'_{i+1} + \mathbf{r}'_{i+2} = 3(R_{i+2} - R_i), \quad i = 0, \dots, k-2, \quad (2.21)$$

ktorej maticové vyjadrenie je

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{r}'_0 \\ \mathbf{r}'_1 \\ \vdots \\ \mathbf{r}'_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3(R_2 - R_0) \\ 3(R_3 - R_1) \\ \vdots \\ 3(R_k - R_{k-2}) \end{pmatrix} \quad (2.22)$$

$$\mathbf{MR} = \mathbf{B}.$$

Všimnime si, že sústava (2.22) reprezentuje $k-1$ rovníc pre $k+1$ neznámych. Aby sme ich vedeli vyjadriť, potrebujeme maticu systému \mathbf{M} a aj jeho pravú stranu \mathbf{B} rozšíriť o dva riadky, čo nám umožní použiť inverznú maticu a teda vyjadrenie neznámych $\mathbf{r}'_0, \dots, \mathbf{r}'_k$. Chýbajúce dve rovnice môžeme doplniť pomocou rovnakých okrajových podmienok, ako v prípade splajnových funkcií.

Hermitov splajn je matematickým modelom fyzického splajnu. Jeho hlavnou nevýhodou je, že ak zmeníme pozíciu jedného riadiaceho bodu, tak sa zmení tvar celej krivky. V takom prípade hovoríme, že splajn *nemá lokálne riadenie*, čiže nedokážeme zrekonštruovať časť krivky bez toho, aby sme neporušili celú krivku. Tým pádom Hermitov splajn je *globálna krivka*.

2.3.1 Okrajové podmienky pre Hermitov splajn

Fixovaný splajn (*clamped spline*)

Zadáваме hodnoty vektorov prvých derivácií (sklony) v začiatčnom a koncovom bode

$$\mathbf{r}'_0 = \mathbf{q}_0, \quad \mathbf{r}'_k = \mathbf{q}_k, \quad \mathbf{q}_0, \mathbf{q}_k \in \mathbf{V}(\mathbb{E}^m). \quad (2.23)$$

Maticový zápis sústavy (2.22), doplnený o tieto okrajové podmienky, je

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & \mathbf{M} & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{R} = \begin{pmatrix} \mathbf{q}_0 \\ \mathbf{B} \\ \mathbf{q}_k \end{pmatrix}. \quad (2.24)$$

Tým pádom vektor \mathbf{R} , obsahujúci hľadané sklony krivky získame riešením tohto doplneného systému ako

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & \mathbf{M} & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{q}_0 \\ \mathbf{B} \\ \mathbf{q}_k \end{pmatrix}. \quad (2.25)$$

Prirodzen  splajn (*relaxed spline*)

V za iatom a koncovom bode sú vektory druhej derivacie nulov . Z vyjadrenia druhej derivacie (2.18) teda dostavame dalšie rovnice

$$\begin{aligned} H_0''(0) = \mathbf{0} &\rightsquigarrow 2\mathbf{r}'_0 + \mathbf{r}'_1 = 3(R_1 - R_0), \\ H_{k-1}''(1) = \mathbf{0} &\rightsquigarrow \mathbf{r}'_{k-1} + 2\mathbf{r}'_k = 3(R_{k-1} - R_k). \end{aligned} \quad (2.26)$$

Maticov  vyjadrenie má potom tvar

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ & & \mathbf{M} & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 3(R_1 - R_0) \\ \mathbf{B} \\ 3(R_k - R_{k-1}) \end{pmatrix}. \quad (2.27)$$

Analogickou cestou môžeme doplniť systém o dve rovnice aj zvyšnými podmienkami, t. j. cyklick /acyklick  splajn, kvadratick  podmienka či podmienka tretej derivacie.

2.3.2 Hermitov splajn s lokálnym riaden m

Zadanie okrajových podmienok v za iatom a koncovom bode splajnu n m zabezpe i globálny charakter modelovania Hermitovej krivky.

Menej presnejši, ale v po tovy v hodnejši spôsob rátania dotykových vektorov $\mathbf{r}'_0, \dots, \mathbf{r}'_k$ je pomocou nasledovnej rekurentnej relacie:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'_0 &= \mathbf{q}_0, \\ \mathbf{r}'_1 &= \mathbf{q}_1, \\ \mathbf{r}'_i &= 3(R_i - R_{i-2}) - 4\mathbf{r}'_{i-1} - \mathbf{r}'_{i-2}, \quad i = 2, \dots, k, \end{aligned} \quad (2.28)$$

kde $\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1 \in \mathbf{V}(\mathbb{E}^m)$ sú vopred zvolen  vektory prvých derivaci  v bodoch R_0 a R_1 . T m, že si na začiatku pevne zvolime sklony pre prve dva body (namiesto prvejho a poslednejho vo fixovanom splajne), obch dzame potrebu výpočtu inverznej matice. Nakolko vychádzame z rekurentnej predpisu pre sklony, zmena riadiaceho bodu R_k , neovplyvní tvar segmentov, ktoré sú ur en  vrcholmi R_0, \dots, R_{k-1} .

Rekurentn  vzťah (2.28) vychádza priamo z podmienky C^2 -spojitosti v spojoch (2.21). Preto aj takto skonštruovan  Hermitov splajn je C^2 -spojit .