Interpolačné splajnové krivky

HERMITOVE KUBICKÉ SPLAJNY,
HERMITOVA INTERPOLÁCIA, C^2-SPLAJN.

Nech sú v priestore E (E^2,E^3) dané body, ktorých polohové vektory označíme $\mathbf{R}_0,...,\mathbf{R}_k$. Zadané body chceme interpolovať krivkou – splajnom, ktorý je čiastkovou kubickou krivkou zloženou z Hermitovych segmentov ${}^i\mathbf{h}(t)$: $\mathbf{R}_i, \mathbf{R}_{i+1}$, i=0,...,k-1 , teda každý segment je opísaný:

$$ {}^i\mathbf{h}(t) = H_{03}(t)\mathbf{R}_i + H_{33}(t)\mathbf{R}_{i+1} + H_{13}(t)\mathbf{r}_i' + H_{23}(t)\mathbf{r}_{i+1}', \quad t \in \langle 0,1 \rangle $$

Na ich určenie je nutné a stačí poznať, okrem daných bodov $\mathbf{R}_0,...,\mathbf{R}_k$, aj dotykové vektory $\mathbf{r}_0', \mathbf{r}_1', ..., \mathbf{r}_{k-1}', \mathbf{r}_k'$. Tieto vektory určíme pomocou podmienky parametrickej spojitosti 2.rádu v spoji dvoch segmentov:

C^2-spojitosť: ${}^i\mathbf{h}''(1) = {}^{i+1}\mathbf{h}''(0)$.

Vieme, že ${}^i\mathbf{h}''(t) = H_{03}''(t)\mathbf{R}_i + H_{33}''(t)\mathbf{R}_{i+1} + H_{13}''(t)\mathbf{r}_i' + H_{23}''(t)\mathbf{r}_{i+1}' =$

$$ = (-6+12t)\mathbf{R}_i + (6-12t)\mathbf{R}_{i+1} + (-4+6t)\mathbf{r}_i' + (-2+6t)\mathbf{r}_{i+1}' $$

a $\quad {}^{i+1}\mathbf{h}''(t) = (-6+12t)\mathbf{R}_{i+1} + (6-12t)\mathbf{R}_{i+2} + (-4+6t)\mathbf{r}_{i+1}' + (-2+6t)\mathbf{r}_{i+2}'$.

Teda ${}^i\mathbf{h}''(1) = 6(\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_{i+1}) + 2\mathbf{r}_i' + 4\mathbf{r}_{i+1}'$ a ${}^{i+1}\mathbf{h}''(0) = 6(\mathbf{R}_{i+2} - \mathbf{R}_{i+1}) - 4\mathbf{r}_{i+1}' - 2\mathbf{r}_{i+2}'$.

Z týchto vzťahov, po dosadení do podmienky spojitosti 2.derivácií:

$$ {}^i\mathbf{h}''(1) = {}^{i+1}\mathbf{h}''(0), i = 0,...,k-2 $$

dostávame sústavu rovníc:

$$ \mathbf{r}_i' + 4\mathbf{r}_{i+1}' + \mathbf{r}_{i+2}' = 3(\mathbf{R}_{i+2} - \mathbf{R}_i)\,, \qquad \text{(A)} $$

pre vektory $\mathbf{r}_1', ..., \mathbf{r}_{k-1}'$. Zápis pomocou matíc:

$$ \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & ... & 0 \\ : & : & : & : & : & : \\ 0 & ... & 0 & 1 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{r}_0' \\ : \\ : \\ \mathbf{r}_k' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3(\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_0) \\ : \\ : \\ 3(\mathbf{R}_k - \mathbf{R}_{k-2}) \end{bmatrix} $$

Táto sústava reprezentuje (k-1) rovníc pre k+1 neznámych $\mathbf{r}_0', \mathbf{r}_1', ..., \mathbf{r}_{k-1}', \mathbf{r}_k'$. Označme jednotlivé matice: M rozmer (k-1)x(k+1); R rozmer (k+1)x1; Q rozmer (k-1)x1.

K jednoznačnému určeniu vektorov $\mathbf{r}_0', \mathbf{r}_1', ..., \mathbf{r}_{k-1}', \mathbf{r}_k'$ v matici R , je potrebné určiť k matici M inverznú maticu. Matica M však nie je štvorcová a preto je potrebné doplniť ju na štvorcovú maticu rozmeru (k+1)x(k+1) t.j. doplniť o dva nenulové riadky. Podobne aj matica Q sa doplní o dva riadky na maticu rozmeru (k+1)x1. Postupy doplnenia závisia na vybraných okrajových podmienkach, ktoré ovplyvnia tvar splajnovej krivky na prvom a poslednom segmente.

Hermitov splajn je matematickým modelom fyzického splajnu a má niektoré nevýhody. Najväčšou nevýhodou je to, že ak zmeníme jeden jeho riadiaci bod tak sa zmení tvar celej krivky. Hovoríme, že splajn nemá lokálne riadenie t.j. nemôžeme zrekonštruovať časť krivky

bez toho, aby sme neporušili celú krivku a preto tento splajn nazývame globálny Hermitov splajn.
Modelovanie krivky sa realizuje výberom okrajových podmienok.

1. **Clamped (fixovaný) splajn**

Zadané sú hodnoty vektorov 1.derivácií v začiatočnom a koncovom bode $\mathbf{R}_0$, $\mathbf{R}_k$ t.j.:

$$\mathbf{r}_0' = \mathbf{q}_0 \quad \text{a} \quad \mathbf{r}_k' = \mathbf{q}_k$$

Existujú rôzne možnosti určenia týchto vektorov napr.ako Besselove dotyčnice (lit) alebo ich zadáva návrhár podľa požiadaviek na tvar - sklon krivky v krajných bodoch $\mathbf{R}_0$, $\mathbf{R}_k$.

Maticový zápis:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & .. & 0 \\ & & M & & \\ 0 & .. & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{r}_0' \\ : \\ \mathbf{r}_k' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_0 \\ Q \\ \mathbf{q}_k \end{bmatrix} \qquad \text{(B)}$$

a zo sústavy (B) vypočítame $\begin{bmatrix} \mathbf{r}_0' \\ : \\ \mathbf{r}_k' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & .. & 0 \\ & & M & & \\ 0 & .. & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_0 \\ Q \\ \mathbf{q}_k \end{bmatrix}$

Teraz vieme opísať všetky segmenty Hermitovho splajnu v tvare:

$$^{i}\mathbf{h}(t) = H_{03}(t)\mathbf{R}_i + H_{33}(t)\mathbf{R}_{i+1} + H_{13}(t)\mathbf{r}_i' + H_{23}(t)\mathbf{r}_{i+1}', \quad t \in \langle 0,1 \rangle$$

kde i=0,...,k-1 (všetky údaje sú známe). Keďže poznáme všetky segmenty Hermitovho splajnu, poznáme aj samotný splajn.

Poznámka: Ďalší, avšak menej „presný“ spôsob určenia Hermitovho splajnu (nie je globálny) je založený na tom, že namiesto dotykových vektorov v krajných bodoch zadanej postupnosti t.j. $\mathbf{r}_0'$, $\mathbf{r}_k'$, zvolíme dotykové vektory $\mathbf{r}_0'$ a $\mathbf{r}_1'$ a následne využijeme sústavu rovníc (A):

$$\mathbf{r}_0' + 4\mathbf{r}_1' + \mathbf{r}_2' = 3(\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_0) \Rightarrow \mathbf{r}_2' = 3(\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_0) - \mathbf{r}_0' - 4\mathbf{r}_1'$$

$$\mathbf{r}_1' + 4\mathbf{r}_2' + \mathbf{r}_3' = 3(\mathbf{R}_3 - \mathbf{R}_1) \Rightarrow \mathbf{r}_3' = 3(\mathbf{R}_3 - \mathbf{R}_1) - \mathbf{r}_1' - 4\mathbf{r}_2'$$

:

Tieto Hermitove splajny sa dajú lokálne upravovať (riadiť), lebo každý segment závisí na svojich hraničných podmienkach (zmena riadiaceho bodu resp. dotykového vektora zmení iba dva segmenty). Aj keď pri konštrukcii splajnu vychádzame iba zo spojitosti 2.derivácií, z opisu segmentov je zrejmé, že tieto splajny sú aj spojité a majú spojité aj prvé derivácie ako sa požaduje v definícii splajnu.

2. **Prirodzený (relaxed) splajn**

V začiatočnom a koncovom bode $\mathbf{R}_0$, $\mathbf{R}_k$ sú vektory 2.derivácie parametrického vyjadrenia krivky nulové t.j. 2. derivácia polynomického vyjadrenia prvého segmentu v bode t = 0 a 2.derivácie posledného segmentu v bode t = 1 sú rovné **0**-vektoru.

Teda v začiatočnom bode $\mathbf{R}_0$: $^{0}\mathbf{h}''(0) = \mathbf{0}$ t.j. $\quad 3(\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_0) - 2\mathbf{r}_0' - \mathbf{r}_1' = \mathbf{0}$,

potom závislosť vektorov 1.derivácie na polohových vektoroch daných bodov môžeme zapísať:

$$2\mathbf{r}_0' + \mathbf{r}_1' = 3(\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_0) \; .$$

V poslednom krajnom bode $\mathbf{R}_k$: ${}^{k-1}\mathbf{h}''(1)=\mathbf{0}$ t.j $3(\mathbf{R}_{k-1}-\mathbf{R}_k)+\mathbf{r}_{k-1}'+2\mathbf{r}_k'=\mathbf{0}$,
teda závislosť vektorov 1.derivácie na polohových vektoroch daných bodov zapíšeme:

$$\mathbf{r}_{k-1}'+2\mathbf{r}_k'=3(\mathbf{R}_k-\mathbf{R}_{k-1}) .$$

Teraz maticu M rozšírime o dva riadky, analogicky aj maticu Q:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & .. & 0 \\ & & M & & \\ 0 & .. & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{r}_0' \\ : \\ \mathbf{r}_k' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3(\mathbf{R}_1-\mathbf{R}_0) \\ Q \\ 3(\mathbf{R}_k-\mathbf{R}_{k-1}) \end{bmatrix} \qquad \text{(C)}$$

a zo sústavy (C) vypočítame $\begin{bmatrix} \mathbf{r}_0' \\ : \\ \mathbf{r}_k' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & .. & 0 \\ & & M & & \\ 0 & .. & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 3(\mathbf{R}_1-\mathbf{R}_0) \\ Q \\ 3(\mathbf{R}_k-\mathbf{R}_{k-1}) \end{bmatrix}$.

Príklad:

Ďalšie okrajové podmienky:

3. **Cyklický splajn**
4. **Acyklický splajn**
5. **Kvadratická okrajová podmienka**
6. **Podmienka 3.derivácie**

Algoritmus konštrukcie globálneho Hermitovho splajnu:

1. vstup: riadiace body $\mathbf{R}_0,...,\mathbf{R}_k$
2. výber okrajovej podmienky a určenie rovníc pre zvolenú okrajovú podmienku
3. sústava k+1 rovníc pre k+1 neznámych $\mathbf{r}_0',\mathbf{r}_1',...,\mathbf{r}_{k-1}',\mathbf{r}_k'$ a ich vyčíslenie
4. vykreslenie Hermitových segmentov:
   $${}^{i}\mathbf{h}(t)=H_{03}(t)\mathbf{R}_i+H_{33}(t)\mathbf{R}_{i+1}+H_{13}(t)\mathbf{r}_i'+H_{23}(t)\mathbf{r}_{i+1}',\ \ t\in\langle 0,1\rangle,\ i=0,...,k-1$$
5. výstup: globálny Hermitov splajn.

Využitie Hermitových splajnov je najmä pri digitalizácii takých aplikácií, v ktorých nie je obtiažne navrhnúť sklon krivky. Pre mnohé aplikácie je výhodnejšie ak sa sklony (dotykové vektory) nemusia priamo zadávať, ale dajú sa získať alebo odhadnúť z iných, najčastejšie bodových dát, alebo z nejakých iných doplnkových informácií ako napríklad kardinálny splajn, kde sa nevyžaduje zadávanie žiadnych dotykových vektorov resp. derivácií, ale vypočítajú sa z daných riadiacich bodov a doplňujúceho parametra.

KARDINÁLNE SPLAJNY

Interpolačné kubické splajny, u ktorých sa určujú dotykové vektory v krajných bodoch segmentov pomocou dvoch priľahlých (susedných) riadiacich bodov a nie je potrebné zadávať ani dotykové vektory na začiatku a konci krivky.

Nech $\mathbf{V}_0, \mathbf{V}_1, \ldots \mathbf{V}_n$ je zadaná postupnosť bodov priestoru E (E^2, E^3), ktorými potrebujeme preložiť krivku zloženú z Hermitových kubických segmentov. Hermitov segment ${}^i\mathbf{h}(t)$ sme definovali pomocou dvoch rôznych bodov $\mathbf{R}_i$ a $\mathbf{R}_{i+1}$ a vektorov $\mathbf{r}_i'$, $\mathbf{r}_{i+1}'$, ktoré boli postavené do úlohy dotykových vektorov v daných bodoch.

Takéto Hermitove segmenty chceme teraz definovať pomocou usporiadanej štvorice bodov $\mathbf{V}_{i-1}, \mathbf{V}_i, \mathbf{V}_{i+1}, \mathbf{V}_{i+2}$ a reálnej konštanty $s > 0$ takto:

- bod $\mathbf{V}_i$ je začiatočný a bod $\mathbf{V}_{i+1}$ je koncový bod segmentu:

  ${}^i\mathbf{h}(0) = \mathbf{V}_i = \mathbf{R}_i, \quad {}^i\mathbf{h}(1) = \mathbf{V}_{i+1} = \mathbf{R}_{i+1}$
- zvyšné body $\mathbf{V}_{i-1}, \mathbf{V}_{i+2}$ slúžia na určenie dotykových vektorov :

  $\mathbf{r}_i' = {}^i\mathbf{r}'(0) = s(\mathbf{V}_{i+1} - \mathbf{V}_{i-1})$, $\mathbf{r}_{i+1}' = {}^i\mathbf{r}'(1) = s(\mathbf{V}_{i+2} - \mathbf{V}_i)$.

Číslo $s > 0$ nazývame <u>koeficient úmernosti</u>, pretože vyjadruje pomer medzi dĺžkami dotykových vektorov segmentu v jeho krajných bodoch a dĺžkami uhlopriečok štvoruholníka $\mathbf{V}_{i-1}\mathbf{V}_i\mathbf{V}_{i+1}\mathbf{V}_{i+2}$ protiľahlých k týmto bodom.

K tomu, aby sme určili parametrické vyjadrenie segmentu kardinálneho splajnu, dosadíme do Hermitovho vyjadrenia, presnejšie do geometrickej matice krajné body a dotykové vektory v týchto bodoch tak, ako sme ich vyššie opísali:

$${}^i\mathbf{h}(t) = \begin{bmatrix} 1 & t & t^2 & t^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_i \\ \mathbf{V}_{i+1} \\ s(\mathbf{V}_{i+1} - \mathbf{V}_{i-1}) \\ s(\mathbf{V}_{i+2} - \mathbf{V}_i) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & t & t^2 & t^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -s & 0 & s & 0 \\ 0 & -s & 0 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{i-1} \\ \mathbf{V}_i \\ \mathbf{V}_{i+1} \\ \mathbf{V}_{i+2} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & t & t^2 & t^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -s & 0 & s & 0 \\ 2s & s-3 & 3-2s & -s \\ -s & 2-s & s-2 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{i-1} \\ \mathbf{V}_i \\ \mathbf{V}_{i+1} \\ \mathbf{V}_{i+2} \end{bmatrix} = T \,.\, M_C \,.\, G_C. \qquad \text{(X)}$$

Získali sme <u>maticové vyjadrenie polynomického segmentu kardinálneho splajnu</u>. Po vynásobení matíc T a M_C dostaneme riadkovú maticu, ktorej prvky sú štyri zmiešavacie funkcie:

$C_{-1}(t) = -st + 2st^2 - st^3 \qquad C_0(t) = 1 + (s-3)t^2 + (2-s)t^3$

$C_1(t) = st + (3-2s)t^2 + (s-2)t^3 \qquad C_2(t) = -st^2 + st^3$.

Grafy zmiešavacích funkcií pre s =1/2. (Hearn 326).

Dve zmiešavacie funkcie $C_{-1}(t)$, $C_2(t)$ sú záporné, funkcie $C_0(t)$, $C_1(t)$ sú symetrické a pre všetky štyri zmiešavacie funkcie platí rozklad jednotky t.j. $\sum_{r=-1}^{2} C_r(t) = 1$.

Teda parametrickú reprezentáciu segmentu (X) zapíšeme pomocou zmiešavacích funkcií a riadiacich bodov:

$$ {}^{i}\mathbf{c}(t) = \sum_{r=-1}^{2} C_r(t)\mathbf{V}_{i+r} \,, t \in \langle 0,1 \rangle \,,\ s > 0. $$

Modelovať segment kardinálneho splajnu môžeme pomocou koeficientu úmernosti $s > 0$. Vyjadrime bod segmentu pre $t = ½$:

$$ {}^{i}\mathbf{c}(\tfrac{1}{2}) = \frac{\mathbf{V}_i + \mathbf{V}_{i+1}}{2} + \frac{1}{4}\left[\frac{\mathbf{V}_i + \mathbf{V}_{i+1}}{2} - \frac{\mathbf{V}_{i-1} + \mathbf{V}_{i+2}}{2}\right]s = \ \mathbf{S}_i + \frac{1}{4}(\mathbf{S}_i - \mathbf{T}_i)\ s\,. $$

Koeficient úmernosti s ovplyvňuje napnutie krivky nad úsečkou $\mathbf{V}_{i-1}\mathbf{V}_i$:

- v zásade koeficient úmernosti s môžeme voliť ľubovoľne $s \in \langle 0, \infty)$
- zväčšovanie hodnoty koeficientu úmernosti s t.j. predlžovanie dotykových vektorov v krajných bodoch vyvoláva zmenšovanie odklonu krivky od dotyčníc, čiže „ťahanie“ sa krivky v smere dotykového vektora a tým vznik kriviek so slabým napnutím a s možným výskytom slučiek.
- pre malé hodnoty koeficientu úmernosti s, krivka iba „krátko sleduje“ dotykový vektor.

Teda odklon krivky sa zmenšovaním hodnoty parametra s zväčšuje a najväčší je pre $s = 0$, kedy segment ${}^{i}\mathbf{c}(t)$ je úsečka $\mathbf{V}_i\mathbf{V}_{i+1}$.

Teraz pristúpime ku konštrukcii kardinálneho splajnu, ktorý bude vytvorený z opísaných kardinálnych segmentov .

Nech je daná postupnosť riadiacich bodov $\mathbf{V}_0, \mathbf{V}_1, \ \dots\ \mathbf{V}_n$. Vytvoríme usporiadané štvorice: $V_0, V_1, V_2, V_3; V_1, V_2, V_3, V_4; \dots; V_{i-1}, V_i, V_{i+1}, V_{i+2}; V_i, V_{i+1}, V_{i+2}, V_{i+3}; \dots; V_{n-3}, V_{n-2}, V_{n-1}, V_n;$ a zistíme, že:

1. segmenty interpolujú body $\mathbf{V}_1$, ..., $\mathbf{V}_{n-1}$, tzv. prirodzené ukončenie kardinálneho splajnu a riadiace body $\mathbf{V}_0$, $\mathbf{V}_n$ sú voľné ukončenia.
2. podmienky spojitosti pre susedné segmenty: ${}^{i}\mathbf{c}(t)$, ${}^{i+1}\mathbf{c}(t)$ a zistíme, že:

(1°) ${}^{i}\mathbf{c}(1) = \mathbf{V}_{i+1}$ a ${}^{i+1}\mathbf{c}(0) = \mathbf{V}_{i+1}$ t.j. ${}^{i}\mathbf{c}(1) = {}^{i+1}\mathbf{c}(0)$.

V spoji je C^0-spojitosť (parametrická spojitosť 0.rádu)

(2°) ${}^{i}\mathbf{c}'(1) = s(\mathbf{V}_{i+2} - \mathbf{V}_i)$ a ${}^{i+1}\mathbf{c}'(0) = s(\mathbf{V}_{i+2} - \mathbf{V}_i)$ t.j. ${}^{i}\mathbf{c}'(1) = {}^{i+1}\mathbf{c}'(0)$.

Teda v spoji je C^1-spojitosť (parametrická spojitosť 1.rádu)

(3°) ${}^{i}\mathbf{c}''(1) = -2s\mathbf{V}_{i-1} + 2(3-2s)\mathbf{V}_i + 2(s-3)\mathbf{V}_{i+1} + 4s\mathbf{V}_{i+2}$ a

${}^{i+1}\mathbf{c}''(0) = 4s\mathbf{V}_i + 2(s-3)\mathbf{V}_{i+1} + 2(3-2s)\mathbf{V}_{i+2} - 2s\mathbf{V}_{i+3}$ t.j. ${}^{i}\mathbf{c}''(1) \neq {}^{i+1}\mathbf{c}''(0)$

V spoji nie je splnená požiadavka na C^2-spojitosť (parametrická spojitosť 2. rádu (ani G^2)).

Teda kardinálny splajn je v spojoch C^1-spojitý t.j. v spoji je parametrická spojitosť 1.rádu.

3. tvarovací parameter – koeficient úmernosti pre rôzne hodnoty parametra s dostaneme rôzne kardinálne splajny. Parameter s je globálny parameter t.j. riadi napnutie krivky rovnako na všetkých segmentoch. Ak vzdialenosti medzi riadiacimi bodmi sú rôzne tak, na niektorých

segmentoch globálny parameter (jeden pre celý splajn) môže vyvolať nežiaduce napnutia. Existujú postupy na zaradenie spojite sa meniaceho tvarovacieho parametra.

4. interpolácia voľných koncov $\mathbf{V}_0,\ \mathbf{V}_n$ sa dá zabezpečiť pomocou násobných bodov alebo fantómových bodov:
násobné body: doplníme postupnosť bodov o body $\mathbf{V}_{-1} = \mathbf{V}_0$, $\mathbf{V}_{n+1} = \mathbf{V}_n$. Tým budú známe štvorice $\mathbf{V}_{-1}\mathbf{V}_0\mathbf{V}_1\mathbf{V}_2$ pre segment ${}^0\mathbf{c}(t)$ a $\mathbf{V}_{n-2}\mathbf{V}_{n-1}\mathbf{V}_n\mathbf{V}_{n+1}$ pre segment ${}^{n-1}\mathbf{c}(t)$.
fantómové body: pridaním segmentu ${}^0\mathbf{c}(t)$: $\mathbf{V}_{-1}\mathbf{V}_0\mathbf{V}_1\mathbf{V}_2$ a segmentu ${}^{n-1}\mathbf{c}(t)$: $\mathbf{V}_{n-2}\mathbf{V}_{n-1}\mathbf{V}_n\mathbf{V}_{n+1}$ získame interpoláciu voľných koncov $\mathbf{V}_0, \mathbf{V}_n$. Ak máme požiadavku na tvar týchto segmentov tak môžeme ich zadávať ako okrajové podmienky.

1. **Fixovaný (clamped) splajn**

Zadané vektory 1. derivácie v bodoch $\mathbf{V}_0, \mathbf{V}_n$ t.j. ${}^0\mathbf{c}'(0) = \mathbf{q}_0 \quad {}^{n-1}\mathbf{c}'(1) = \mathbf{q}_n$

Vyčíslime fantómové body: $\mathbf{V}_{-1}:\ s(\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_{-1}) = \mathbf{q}_0 \Rightarrow \mathbf{V}_{-1} = \mathbf{V}_1 - \frac{1}{s}\mathbf{q}_0$

$$\mathbf{V}_{n+1}:\ s(\mathbf{V}_{n+1} - \mathbf{V}_{n-1}) = \mathbf{q}_n \Rightarrow \mathbf{V}_{n+1} = \mathbf{V}_{n-1} + \frac{1}{s}\mathbf{q}_n$$

2. **Prirodzený (relaxed) splajn**

Vektor 2. derivácie v krajných bodoch je rovný **0**-vektoru: ${}^0\mathbf{c}''(0) = \mathbf{0} \quad {}^{n-1}\mathbf{c}''(1) = \mathbf{0}$.
Teda fantómové body :

$${}^0\mathbf{c}''(0) = 4s\mathbf{V}_{-1} + 2(s-3)\mathbf{V}_0 + 2(3-2s)\mathbf{V}_1 - 2s\mathbf{V}_2 = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{V}_{-1} = \frac{1}{4s}\left[-2(s-3)\mathbf{V}_0 - 2(3-2s)\mathbf{V}_1 + 2s\mathbf{V}_2\right] =$$

$$= \mathbf{V}_1 - \frac{3}{2s}(\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_0) + \frac{1}{2}(\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_0)$$

$${}^{n-1}\mathbf{c}''(1) = -2s\mathbf{V}_{n-2} + 2(3-2s)\mathbf{V}_{n-1} + 2(s-3)\mathbf{V}_n + 4s\mathbf{V}_{n+1} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{V}_{n+1} = \frac{1}{4s}\left[2s\mathbf{V}_{n-2} - 2(3-2s)\mathbf{V}_{n-1} - 2(s-3)\mathbf{V}_n\right] =$$

$$= \mathbf{V}_{n-1} + \frac{3}{2s}(\mathbf{V}_n - \mathbf{V}_{n-1}) - \frac{1}{2}(\mathbf{V}_n - \mathbf{V}_{n-2})$$

Ako sme uviedli koeficient úmernosti s ovplyvňuje napnutie krivky a vieme tento parameter meniť $s \in \langle 0, \infty)$. Maximálne napnutie dosiahneme pre s = 0, ukazuje sa však, že tento parameter s nepredstavuje typické napnutie a preto sa definuje pri kardinálnych splajnoch parameter napätia T- tension ako $s := (1-T)/2$ čo dáva $T = 1-2s$.

Hodnotu T = 0 získame ak s = ½ a kardinálne splajny s nulovým napnutím t.j. T = 0 nazývame **Catmull-Rommove** splajny alebo **Overhauserove** splajny (Hearn-Baker, Salomon 253-255, opis konštrukcie).

Ešte uvedieme jeden prípad kardinálnych splajnov, ktoré sú ich zovšeobecnením resp. rozšírením. Upredností̌ujem názov rozšírenie, pretože dodávame ďalšie dva parametre *b*-

bias, *c*-continuity. Tieto dva parametre poskytnú ďalšiu flexibilitu pri modelovaní tvaru ich segmentov.

Kochanek – Bartelsove splajny: nech riadiace body $\mathbf{V}_{i-1}, \mathbf{V}_i, \mathbf{V}_{i+1}, \mathbf{V}_{i+2}$ sú vstupná dátová štvorica ako pre kardinálny segment . Kochanek-Bartelsove splajny ${}^{i}\mathbf{k}(t)$ majú nasledovné vstupné podmienky:

- bod ${}^{i}\mathbf{k}(0) = \mathbf{V}_i$ je začiatočný a bod ${}^{i}\mathbf{k}(1) = \mathbf{V}_{i+1}$ je koncový bod segmentu
- vektory dotyčníc v krajných bodoch:

$$ {}^{i}\mathbf{k}'(0) = \frac{1}{2}(1-T)\left[(1+b)(1-c)(\mathbf{V}_i - \mathbf{V}_{i-1}) + (1-b)(1+c)(\mathbf{V}_{i+1} - \mathbf{V}_i)\right] $$

$$ {}^{i}\mathbf{k}'(1) = \frac{1}{2}(1-T)\left[(1+b)(1+c)(\mathbf{V}_{i+1} - \mathbf{V}_i) + (1-b)(1-c)(\mathbf{V}_{i+2} - \mathbf{V}_{i+1})\right] $$

kde *T* – tension je parameter napätia,
b – bias- parameter predpätia , alebo šikmosti
c – continuity – parameter spojitosti.

Podľa Kochanek-Bartelsovej formulácie, derivácie parametrickej reprezentácie nemusia byť spojité v krajných bodoch segmentov. Konkrétnejšie, parameter *c* riadi spojitosť dotykového vektora v hraničných bodoch segmentu v tom zmysle, že ak $T \neq 1$ (t.j. $s \neq 0$) a parametru *c* je priradená nenulová hodnota, tak sklony segmentov krivky v ich hraničných bodoch môžu byť nespojité. Parameter *b* sa používa na úpravu veľkosti ohybu segmentu krivky v koncových bodoch. Kochanek-Bartelsove splajny sa používajú na modelovanie animačných dráh. Prudké zmeny v pohybe objektu možno simulovať nenulovými hodnotami parametra spojitosti *c*.
(Hearn-Baker 325, Salomon 258).