B-SPLAJNOVÉ KRIVKY

C^2-SPLAJN APROXIMAČNÝ

Pri B-splajnových krivkách sa konštruujú oveľa flexibilnejšie, po častiach polynomické funkcie, nazývané B-splajnové funkcie: „B“-basis spline. Je známe, že prvý pracoval s B-splajnovými funkciami **Lobačevskij** (19.stor). V roku 1946 **Schoenberg** využil B-splajnové funkcie k vyhladzovaniu štatistických údajov a odštartoval modernú teóriu aproximácie splajnami. Významnou osobnosťou v teórii B-splajnov bol **Riesenfeld** a praktikom **Carl de Boor** (1972).

B-splajnová krivka je aproximačná krivka vzhľadom na riadiaci polygón. Navyše okrem riadiacich bodov sa pracuje aj s uzlami, ktoré ponúkajú dodatočné modifikácie tvaru krivky.

B-splajnové krivky

Nech $\mathbf{V}_0, \mathbf{V}_1, \ldots, \mathbf{V}_n$ je postupnosť vrcholov v riadiacom polygóne a funkcie $N_{i,p}(u)$ sú B-splajnové funkcie stupňa p, $u \in \langle a,b \rangle$ definované na uzlovom vektore $U = \{u_0, \ldots, u_m;\ u_i \le u_{i+1}, m = n+p+1\}$. Potom množina bodov v priestore E definovaná predpisom

$$\mathbf{s}(u) = \sum_{i=0}^{n} N_{i,p}(u)\mathbf{V}_i \qquad u \in \langle a,b \rangle$$

je B-splajnová krivka stupňa p.

B-splajnové funkcie $N_{i,p}(u)$

Je niekoľko spôsobov ako definovať B-splajnové funkcie. Uvedieme rekurentný predpis, ktorý v roku 1972 zaviedli Cox a de Boor.

Dané:

- p- stupeň (rád = stupeň + 1 = p+1), $p \in N$ - všetky uvažované funkcie sú stupňa $\le p$
- $\langle a,b \rangle$ - interval, $a < b$, definičný obor splajnových funkcií
- m – prirodzené číslo a neklesajúca postupnosť reálnych čísel $u_0 \le u_1 \le \ldots \le u_m$; u_i – uzly ; $i = 0,1, \ldots, m$

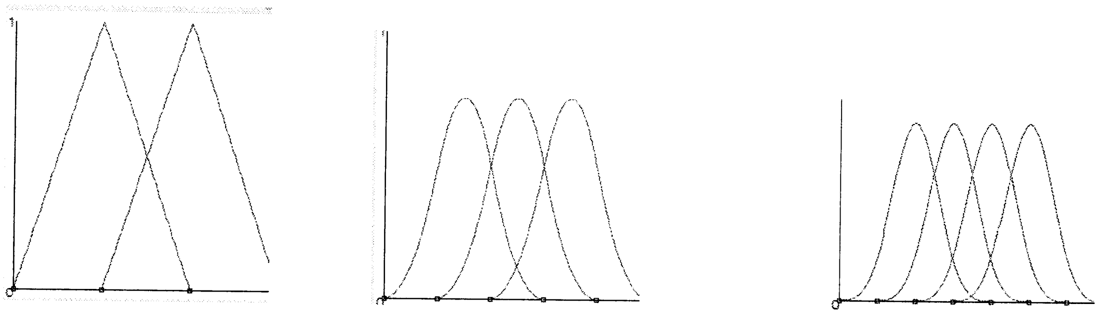
B-splajnová funkcia $N_{i,p}(u)$, $i \in \{0,1, \ldots, n\}$ stupňa p pre uzlový vektor $U = \{u_0, \ldots, u_m\}$ je definovaná Cox – de Boor rekurzívne:

$$N_{i,0}(u) = \begin{cases} 1 & \text{ak } u \in \langle u_i, u_{i+1}) \\ 0 & \text{ináč} \end{cases}$$

$$N_{i,p}(u) = \frac{u - u_i}{u_{i+p} - u_i} N_{i,p-1}(u) + \frac{u_{i+p+1} - u}{u_{i+p+1} - u_{i+1}} N_{i+1,p-1}(u) \qquad u \in \langle u_i, u_{i+p+1})$$

- $N_{i,0}(u)$ - stupňa 0, je skoková funkcia, ktorej hodnoty sú 0, okrem polootvoreného intervalu $u \in \langle u_i, u_{i+1})$
- $p > 0$, $N_{i,p}(u)$ je lineárna kombinácia dvoch funkcií stupňa p-1: $N_{i,p-1}(u)$ a $N_{i+1,p-1}(u)$

Vlastnosti B-splajnových funkcií



1. pozitívnosť: $N_{i,p}(u) > 0$, pre $u \in \langle u_i, u_{i+p+1})$
2. lokálny nosič: $N_{i,p}(u) = 0$, pre $u \notin \langle u_i, u_{i+p+1} \rangle$
3. čiastkové polynomické funkcie: $N_{i,p}(u)$ sú čiastkové polynomické funkcie vytvorené z (p+1) polynómov stupňa p.
4. rozklad jednotky: pre každé $u \in \langle u_i, u_{i+1})$: $\sum_{j=i-p}^{i} N_{j,p}(u) = 1$
5. spojitosť: ak vnútorný uzol u_i má násobnosť k_i, tak funkcia $N_{i,p}(u)$ je v bode $u = u_i$ C^{p-k_i} spojitá a všade inde je C^∞ spojitá (len mimo uzlov).
6. vyjadrenie B-splajnových funkcií v monomiálnej báze:

   $t \in \langle 0,1 \rangle$ - lokálny parameter $\quad t = \frac{u - u_i}{u_{i+1} - u_i}$ - reparametrizácia

   $p = 0 \qquad N_{i0}(t) = 1$

   $p = 1 \qquad N_{i-1,1}(u) \to N_{01}(t) = 1 - t$

   $\qquad\qquad N_{i,1}(u) \to N_{11}(t) = t$

   $p = 2 \qquad N_{i-2,2}(u) \to N_{02}(t) = \frac{1}{2}(1 - 2t + t^2)$

   $\qquad\qquad N_{i-1,2}(u) \to N_{12}(t) = \frac{1}{2}(1 + 2t - 2t^2)$

   $\qquad\qquad N_{i,2}(u) \to N_{22}(t) = \frac{1}{2}t^2$

$p=3$ $\quad N_{i-3,3}(u) \to N_{03}(t) \qquad N_{03}(t)=\frac{1}{6}(1-3t+3t^2-t^3)$

$N_{i-2,3}(u) \to N_{13}(t) \qquad N_{13}(t)=\frac{1}{6}(4-6t^2+3t^3)$

$N_{i-1,3}(u) \to N_{23}(t) \qquad N_{23}(t)=\frac{1}{6}(1+3t+3t^2-3t^3)$

$N_{i,3}(u) \to N_{33}(t) \qquad N_{33}(t)=\frac{1}{6}t^3$

7. uzlový vektor – pre následné modelovanie kriviek je dôležité pochopiť význam násobných uzlov; číslo k_i - **násobnosť uzla** u_i, koľkokrát sa hodnota uzla u_i vyskytuje v uzlovej postupnosti: $k_i=1$ jednoduchý, jednonásobný uzol

$k_i=p+1$ maximálna násobnosť uzla

vlastnosti B-splajnovej funkcie na násobných uzloch:

$k_i \to p+1$ redukuje sa dĺžka nosiča

B-splajnová funkcia stupňa p je na k_i-násobných uzloch C^{p-k_i} spojite diferencovateľná (násobnosť uzla znižuje spojitosť B-splajnovej funkcie)

Pri uzlovom vektore $\{u_0, \dots, u_m\}$ budeme hovoriť, že je **rovnomerný** (**uniform**), t.j. existuje reálne číslo $d=u_{i+1}-u_i$ pre všetky $p \le i \le m-p-1$.
V ostatných prípadoch – **nerovnomerný** (**nonuniform**).

B-splajnové krivky stupňa *p*

B-splajnová krivka stupňa p určená riadiacimi bodmi $\mathbf{V}_0, \mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_n$ (resp. riadiacim polygónom $\mathbf{V}_0, \mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_n$) a uzlovým vektorom $U=\{u_0, \dots, u_m;\ u_i \le u_{i+1}, m=n+p+1\}$ je definovaná predpisom:

$$\mathbf{s}(u)=\sum_{i=0}^{n} N_{i,p}(u)\mathbf{V}_i \qquad u \in \langle a,b \rangle$$

kde $N_{i,p}(u)$ - B-splajnové funkcie stupňa p definované na uzlovom vektore U.
Je zrejmé, že ak $\mathbf{V}_i=[x_i, y_i, z_i]$, $i=0,1,\dots,n$, tak

$$\mathbf{s}(u)=\sum_{i=0}^{n}\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix} N_{i,p}(u)=\begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{n} x_i N_{i,p}(u) \\ \sum_{i=0}^{n} y_i N_{i,p}(u) \\ \sum_{i=0}^{n} z_i N_{i,p}(u) \end{pmatrix}$$

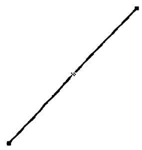
a teda: $x(u)=\sum_{i=0}^{n} x_i N_{i,p}(u), y(u)=\sum_{i=0}^{n} y_i N_{i,p}(u),\ z(u)=\sum_{i=0}^{n} z_i N_{i,p}(u)$ je parametrické vyjadrenie B-splajnovej krivky stupňa p.

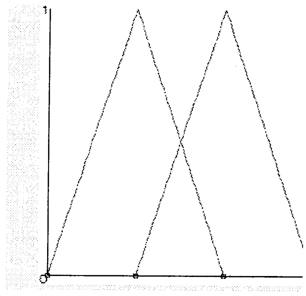
Vlastnosti *i*-teho segmentu ${}^i\mathbf{s}(u)$ stupňa p, $u \in \langle u_i, u_{i+1})$ pre stupeň $p=1, 2, 3, \dots$:

- $p = 1$

$$ {}^{i}\mathbf{s}(u) = \left[N_{i-1,1}(u)\; N_{i,1}(u) \right] \begin{bmatrix} \mathbf{V}_i \\ \mathbf{V}_{i+1} \end{bmatrix} $$

$$ {}^{i}\mathbf{s}(t) = \left[N_{0,1}(t)\; N_{1,1}(t) \right] \begin{bmatrix} \mathbf{V}_i \\ \mathbf{V}_{i+1} \end{bmatrix} = \left[1-t \;\; t \right] \begin{bmatrix} \mathbf{V}_i \\ \mathbf{V}_{i+1} \end{bmatrix} = (1-t)\mathbf{V}_i + t\mathbf{V}_{i+1} \qquad t \in \langle 0,1 \rangle $$





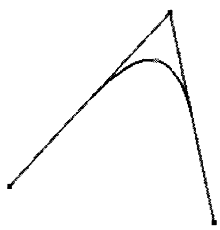
rovnomerný uzlový vektor $U=\{0,1,2,3\}$

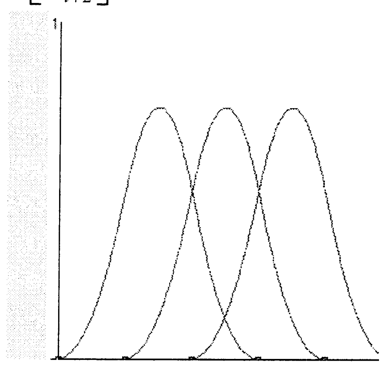
Segment ${}^{i}\mathbf{s}(u)$ stupňa $p=1$ je úsečka $\mathbf{V}_i\mathbf{V}_{i+1}$.

- $p = 2$

$$ {}^{i}\mathbf{s}(u) = \left[N_{i-2,2}(u)\; N_{i-1,2}(u)\; N_{i,2}(u) \right] \begin{bmatrix} \mathbf{V}_i \\ \mathbf{V}_{i+1} \\ \mathbf{V}_{i+2} \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} u \in \langle u_i, u_{i+1} \rangle \\ t \in \langle 0,1 \rangle \end{matrix} $$

$$ {}^{i}\mathbf{s}(t) = \left[N_{0,2}(t)\; N_{1,2}(t)\; N_{2,2}(t) \right] \begin{bmatrix} \mathbf{V}_i \\ \mathbf{V}_{i+1} \\ \mathbf{V}_{i+2} \end{bmatrix} = N_{0,2}(t)\mathbf{V}_i + N_{1,2}(t)\mathbf{V}_{i+1} + N_{2,2}(t)\mathbf{V}_{i+2} $$





rovnomerný uzlový vektor $U=\{0,1,2,3,4,5\}$

<u>Krajné body segmentu</u> ${}^{i}\mathbf{s}(t) = \sum_{j=0}^{2} N_{j,2}(t)\mathbf{V}_{i+j} \qquad t \in \langle 0,1 \rangle$

začiatok : ${}^{i}\mathbf{s}(0) = \frac{1}{2}(\mathbf{V}_i + \mathbf{V}_{i+1})$

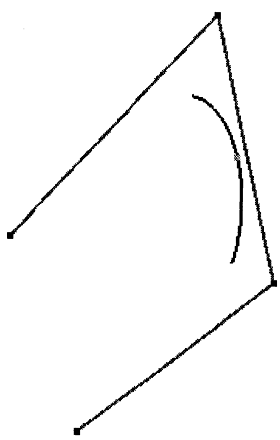
koniec : ${}^{i}\mathbf{s}(1) = \frac{1}{2}(\mathbf{V}_{i+1} + \mathbf{V}_{i+2})$

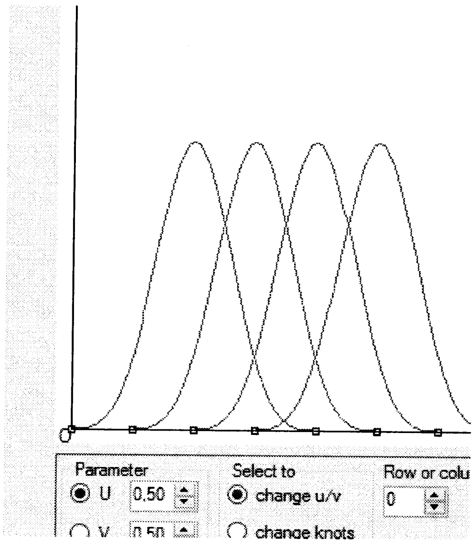
<u>Vektor prvej derivácie:</u> ${}^{i}\mathbf{s}'(t) = [0 \;\; 1 \;\; 2t] \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_i \\ \mathbf{V}_{i+1} \\ \mathbf{V}_{i+2} \end{bmatrix}$

začiatok : ${}^{i}\mathbf{s}'(0) = \mathbf{V}_{i+1} - \mathbf{V}_{i}$

koniec: ${}^{i}\mathbf{s}'(1) = \mathbf{V}_{i+2} - \mathbf{V}_{i+1}$

• $\boldsymbol{p = 3}$ $${}^{i}\mathbf{s}(u) = \left[N_{i-3,3}(u)\ N_{i-2,3}(u)\ N_{i-1,3}(u)\ N_{i,3}(u)\right]\begin{bmatrix}\mathbf{V}_{i}\\ \mathbf{V}_{i+1}\\ \mathbf{V}_{i+2}\\ \mathbf{V}_{i+3}\end{bmatrix}$$





rovnomerný uzlový vektor $U=\{0,1,2,3,4,5,6,7\}$

Vlastnosti segmentu: ${}^{i}\mathbf{s}(t) = \sum_{j=0}^{3} N_{j,3}(t)\mathbf{V}_{i+j} \qquad t \in \langle 0,1 \rangle$

$${}^{i}\mathbf{s}(t) = \begin{bmatrix}1 & t & t^2 & t^3\end{bmatrix}\frac{1}{6}\begin{bmatrix}1 & 4 & 1 & 0\\ -3 & 0 & 3 & 0\\ 3 & -6 & 3 & 0\\ -1 & 3 & -3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{V}_{i}\\ \mathbf{V}_{i+1}\\ \mathbf{V}_{i+2}\\ \mathbf{V}_{i+3}\end{bmatrix}$$

• Krajné body segmentu :

začiatok: ${}^{i}\mathbf{s}(0) = \frac{1}{6}(\mathbf{V}_{i} + 4\mathbf{V}_{i+1} + \mathbf{V}_{i+2}) = \mathbf{V}_{i+1} + \frac{1}{3}(\frac{\mathbf{V}_{i} + \mathbf{V}_{i+2}}{2} - \mathbf{V}_{i+1})$ a je antiťažisko trojuholníka V_i V_{i+1} V_{i+2}

koniec: ${}^{i}\mathbf{s}(1) = \mathbf{V}_{i+2} + \frac{1}{3}(\frac{\mathbf{V}_{i+1} + \mathbf{V}_{i+3}}{2} - \mathbf{V}_{i+2})$ a je antiťažisko trojuholníka V_{i+1} V_{i+2} V_{i+3},

• Vektor 1.derivácie segmentu: ${}^{i}\mathbf{s}'(t) = \sum_{j}^{3} N'_{j,3}(t)\ \mathbf{V}_{i+j}$

začiatok: ${}^{i}\mathbf{s}'(0) = \frac{1}{2}(\mathbf{V}_{i+2} - \mathbf{V}_{i})$ a je rovnobežný so spojnicou bodov $\mathbf{V}_{i}\mathbf{V}_{i+2}$

koniec: ${}^{i}\mathbf{s}'(1) = \frac{1}{2}(\mathbf{V}_{i+3} - \mathbf{V}_{i+1})$ a je rovnobežný so spojnicou bodov $\mathbf{V}_{i+1}\mathbf{V}_{i+3}$.

• Vektor 2.derivácie segmentu: ${}^{i}\mathbf{s}''(t) = \sum_{j}^{3} N''_{j,3}(t)\ \mathbf{V}_{i+j}$

začiatok: ${}^{i}\mathbf{s}''(0) = (\mathbf{V}_i - 2\mathbf{V}_{i+1} + \mathbf{V}_{i+2}) = (\mathbf{V}_i - \mathbf{V}_{i+1}) + (\mathbf{V}_{i+2} - \mathbf{V}_{i+1})$ výsledkom je rovnobežník $\mathbf{V}_i\ \mathbf{V}_{i+1}\mathbf{V}_{i+2}\ \mathbf{V}$, ktorého uhlopriečky sa rozpoľujú a teda vektor 2.derivácie má umiestnenie ako vektor $\mathbf{V}_{i+1}\ \mathbf{V}_M$, $\mathbf{V}_M$ stred $\mathbf{V}_i\ \mathbf{V}_{i+2}$

koniec: ${}^{i}\mathbf{s}''(1) = (\mathbf{V}_{i+1} - 2\mathbf{V}_{i+2} + \mathbf{V}_{i+3}) = (\mathbf{V}_{i+1} - \mathbf{V}_{i+2}) + (\mathbf{V}_{i+3} - \mathbf{V}_{i+2})$ výsledkom je rovnobežník $\mathbf{V}_{i+1}\mathbf{V}_{i+2}\mathbf{V}_{i+3}\mathbf{W}$, ktorého uhlopriečky sa rozpoľujú a vektor 2.derivácie má umiestnenie ako vektor $\mathbf{V}_{i+2}\ \mathbf{V}_N$, $\mathbf{V}_N$ stred $\mathbf{V}_{i+1}\mathbf{V}_{i+3}$

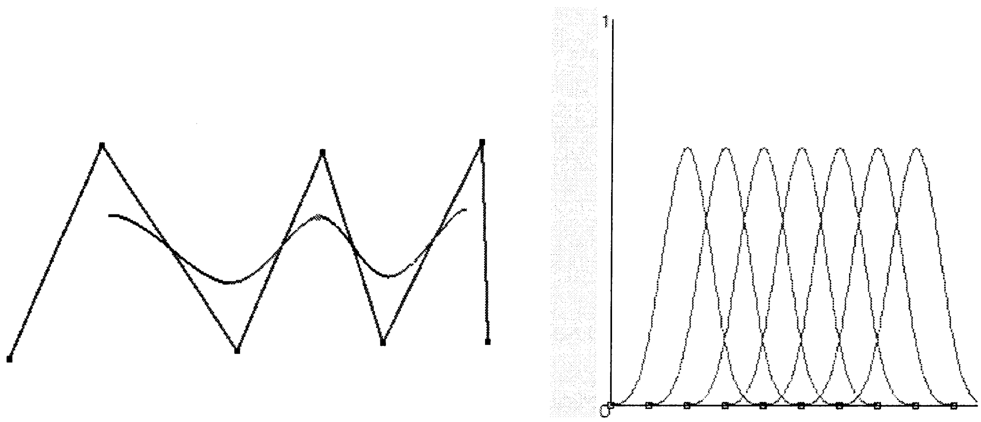
Teda, ako sme uviedli, B-splajnová krivka stupňa p, je vytvorená zo segmentov ${}^{i}\mathbf{s}(u)$ stupňa p.

B-splajnové krivky- konštrukcia

I. Nech $\mathbf{V}_0, \mathbf{V}_1, \ldots, \mathbf{V}_n$ je postupnosť vrcholov v riadiacom polygóne . B-splajnová krivka stupňa p, má uzlový vektor $U = \{u_0, \ldots, u_m\}, m = n + p + 1$.

A. U - **rovnomerný (uniform)** $d = u_{i+1} - u_i$

Počet segmentov: ${}^{i}\mathbf{s}(u)$ stupňa p, $u \in \langle u_i, u_{i+1})$, je n - p+1 a maximálny stupeň $p = n$



rovnomerný uzlový vektor U={0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10}

B. U – **nerovnomerný, násobné uzly** :

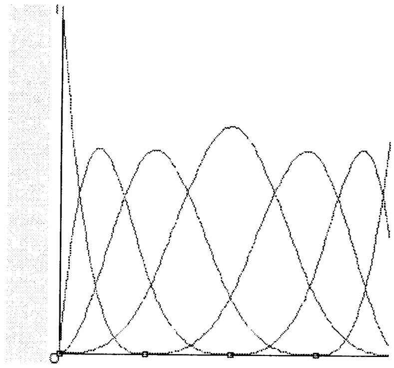
Počet segmentov: ${}^{i}\mathbf{s}(u)$ stupňa p, $u \in \langle u_i, u_{i+1})$ sa zníži, maximálna násobnosť uzla $k_i = p+1$

Spojitosť segmentov v bode napojenia je C^{p-k_i}

C. U – **otvorený**: krajné uzly s maximálnou násobnosťou uzla $u_0 = \ldots = u_p$; $u_{m-p} = \ldots = u_m$

Začiatok B-splajnovej krivky $\quad \mathbf{s}(u_p) = \sum_{i=0}^{n} N_{i,p}(u_p)\mathbf{V}_i = \mathbf{V}_0$

koniec B-splajnovej krivky $\mathbf{s}(u_{m-p}) = \sum_{i=0}^{n} N_{i,p}(u_{m-p})\mathbf{V}_i = \mathbf{V}_n$



otvorený uzlový vektor $U=\{0,0,0,0,1,2,3,4,4,4,4\}$

B-splajnová krivka stupňa p $\mathbf{s}(u) = \bigcup_i {}^i\mathbf{s}(u)$, $u \in \langle a,b \rangle$ má nasledujúce vlastnosti:

1° **<u>definičný obor</u>** funkcií (kriviek) – interval $D_f = \langle a,b \rangle = \langle u_p, u_{m-p} \rangle$

2° **<u>lokálne riadenie</u>:** segment krivky definovaný na intervale $\langle u_r, u_{r+1})$, $p \le r \le m-p-1$ je určený (len) riadiacimi bodmi $\mathbf{V}_{r-p}, \dots, \mathbf{V}_r$.

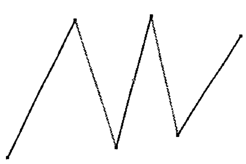
3° **<u>konvexný obal</u>:** Ak $u \in \langle u_r, u_{r+1} \rangle$ a $p \le r \le m-p-1$, tak ${}^r\mathbf{s}(u) \in KO\left[\mathbf{V}_{r-p}, \dots, \mathbf{V}_r\right]$

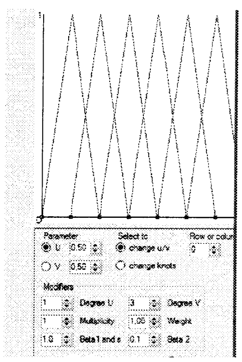
4° **<u>spojitosť</u>:** Ak k_i je násobnosť uzla $u = u_i$, tak $\mathbf{s}(u)$ je C^{p-k_i} spojitá v $u = u_i$ a C^∞ spojitá mimo uzlov

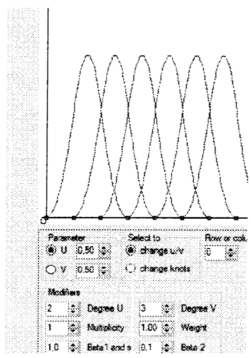
5° **<u>invariantnosť</u>** vzhľadom na afinné transformácie: $T\left(\sum_{i=0}^{n} N_{i,p}(u)\mathbf{V}_i\right) = \sum_{i=0}^{n} N_{i,p}(u)T(\mathbf{V}_i)$

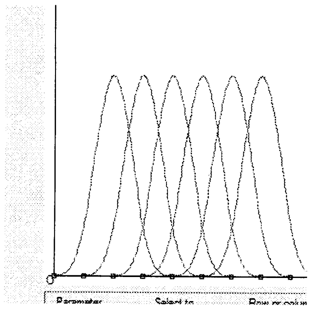
Ďalšie možnosti konštrukcie a modifikácie tvaru B-splajnovej krivky

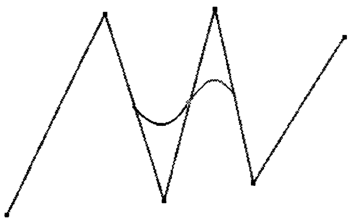
Zmena stupňa

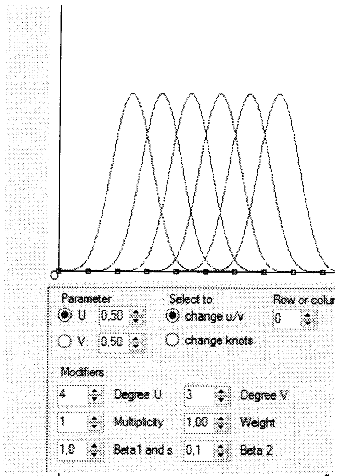


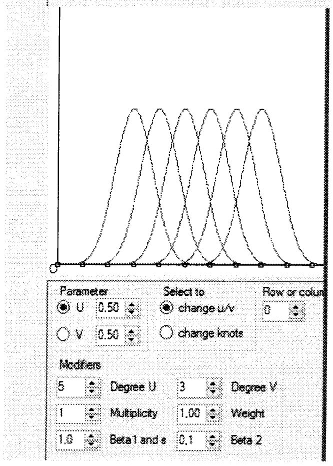




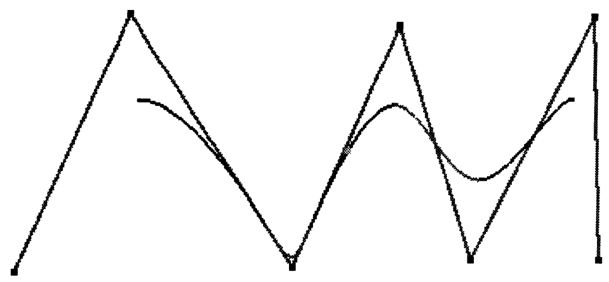


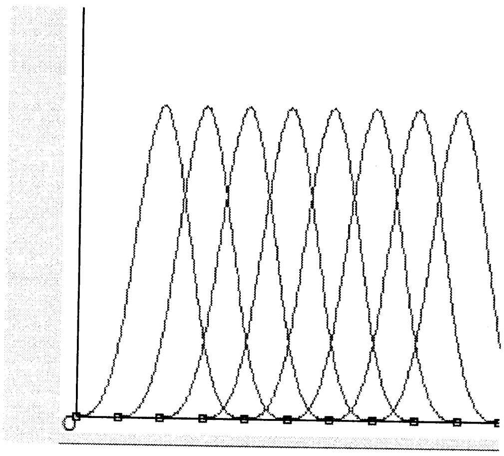



Parameter
U 0,50
V 0,50
Select to
change u/v
change knots
0
Modifiers
4 Degree U
3 Degree V
1 Multiplicity
1,00 Weight
1,0 Beta1 and s
0,1 Beta 2


Parameter
U 0,50
V 0,50
Select to
change u/v
change knots
0
Modifiers
5 Degree U
3 Degree V
1 Multiplicity
1,00 Weight
1,0 Beta1 and s
0,1 Beta 2

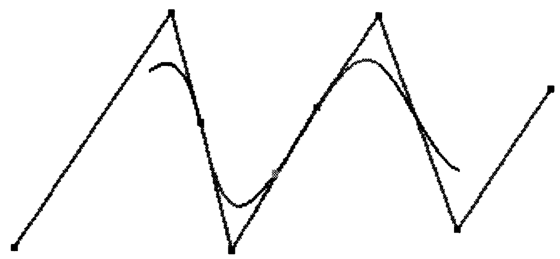
Násobné vrcholy

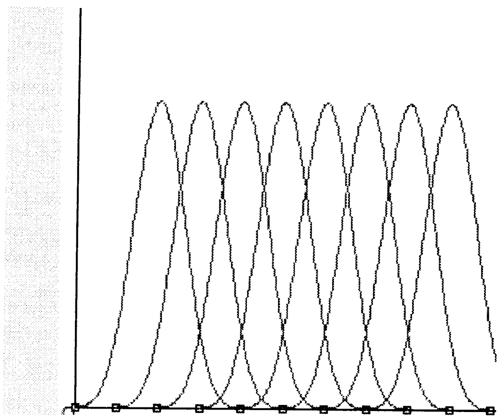




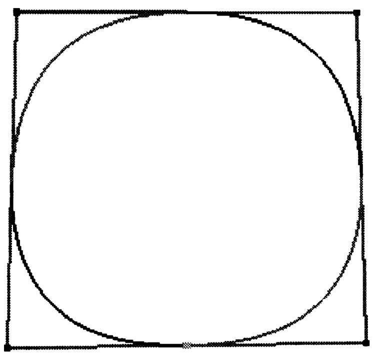
rovnomerný uzlový vektor U={0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11}

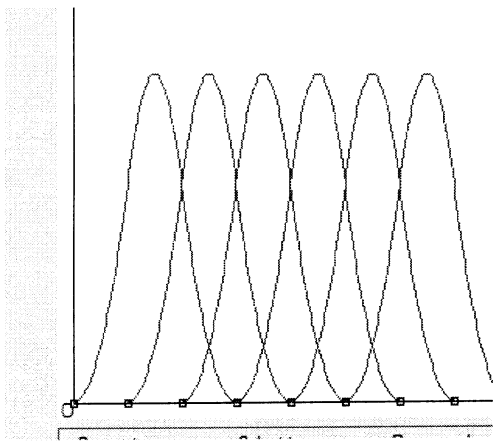
Kolineárnosť riadiacich bodov, krivka 3.stupňa





Periodické B-splajnové krivky 2 stupňa





rovnomerný uzlový vektor U={0,1,2,3,4,5,6,7,8}