

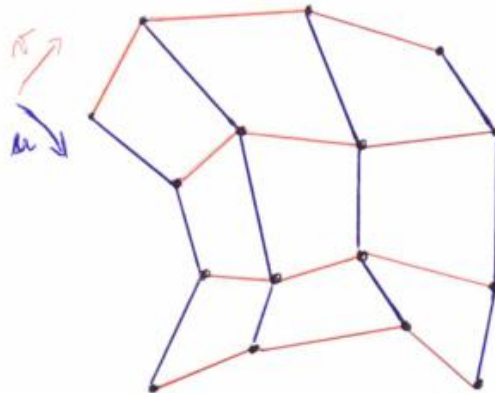
PLOCHY URČENÉ RIADIACOU SIEŤOU
PLOCHY TENZOROVÉHO SÚČINU

Princíp vytvorenia: nech

$$\mathbf{r}(u) = U.M.G = U.M. \begin{bmatrix} G_0 \\ G_1 \\ G_2 \\ G_3 \end{bmatrix}, u \in \langle 0,1 \rangle$$

je kubická krivka s riadiacimi prvkami $G_i, i = 0,1,2,3$. Prvky v geometrickej matici G vytvoria pre parameter $v \in \langle 0,1 \rangle$ kubickú krivku

$$G_i(v) = V.M.g_i = V.M. \begin{bmatrix} g_{i0} \\ g_{i1} \\ g_{i2} \\ g_{i3} \end{bmatrix}, i = 0,1,2,3.$$



Teda plocha má vektorovú rovnicu:

$$\mathbf{r}(u, v) = U.M. \begin{bmatrix} G_0(v) \\ G_1(v) \\ G_2(v) \\ G_3(v) \end{bmatrix}, u, v \in \langle 0,1 \rangle \times \langle 0,1 \rangle$$

Vieme, že pre súčin matic platí $(A.B.C)^T = C^T.B^T.A^T$, teda pre súčin $(V.M.g_i)^T = g_i^T.M^T.V^T$ t.

j. $G_i(v) = [g_{i0} \ g_{i1} \ g_{i2} \ g_{i3}].M^T.V^T$. Po dosadení do rovnice plochy $\mathbf{r}(u, v)$ dostaneme:

$$\mathbf{r}(u, v) = U.M. \begin{bmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{02} & g_{03} \\ g_{10} & g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{20} & g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{30} & g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix} .M^T.V^T, u, v \in \langle 0,1 \rangle \times \langle 0,1 \rangle$$

Po vynásobení matic $U.M$, resp. $(V.M)^T$ dostaneme zmiešavacie funkcie $f_i(u)$, resp. $g_j(v)$ t. j.

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(u, v) &= [f_0(u) \quad f_1(u) \quad f_2(u) \quad f_3(u)] \cdot \begin{bmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{02} & g_{03} \\ g_{10} & g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{20} & g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{30} & g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} g_0(v) \\ g_1(v) \\ g_2(v) \\ g_3(v) \end{bmatrix} = \\ &= f_0(u) \cdot g_0(v) \cdot g_{00} + \dots + f_3(u) \cdot g_3(v) \cdot g_{33} = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 f_i(u) \cdot g_j(v) \cdot g_{ij} \cdot \end{aligned}$$

Súčin funkcií $f_i(u) \cdot g_j(v)$ sa nazýva ich **tenzorový súčin**. V prípade, že obe funkcie sú 3. stupňa hovoríme o bikubickom tenzorovom súčine. Prvky $g_{ij}, i = 0, 1, 2, 3, j = 0, 1, 2, 3$ v geometrickej matici určujú **riadiacu sieť plochy**.

Bezierova bikubická plocha

Zmiešavacie funkcie $f_i(u), g_j(v)$ sú kubické Bernsteinove polynómy. Teda vektorová rovnica:

$$\mathbf{b}(u, v) = [B_{03}(u) \quad B_{13}(u) \quad B_{23}(u) \quad B_{33}(u)] \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{00} & \mathbf{V}_{01} & \mathbf{V}_{02} & \mathbf{V}_{03} \\ \mathbf{V}_{10} & \mathbf{V}_{11} & \mathbf{V}_{12} & \mathbf{V}_{13} \\ \mathbf{V}_{20} & \mathbf{V}_{21} & \mathbf{V}_{22} & \mathbf{V}_{23} \\ \mathbf{V}_{30} & \mathbf{V}_{31} & \mathbf{V}_{32} & \mathbf{V}_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} B_{03}(v) \\ B_{13}(v) \\ B_{23}(v) \\ B_{33}(v) \end{bmatrix}$$

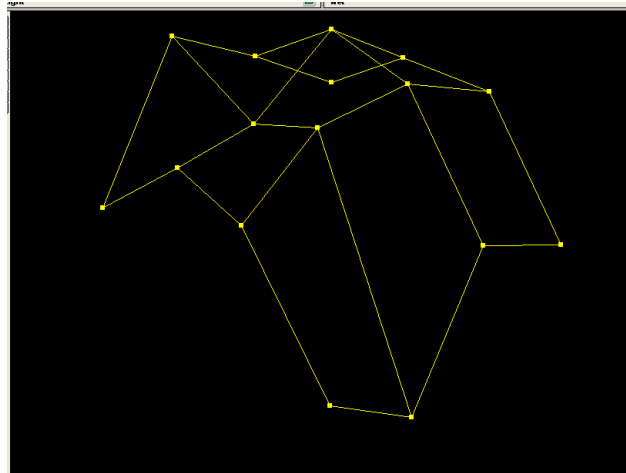
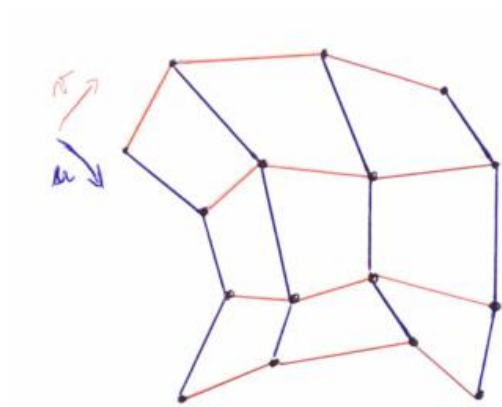
resp.

$$\mathbf{b}(u, v) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 B_{i3}(u) \cdot B_{j3}(v) \cdot \mathbf{V}_{ij} = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 B_{ij}(u, v) \mathbf{V}_{ij}, u, v \in \langle 0,1 \rangle \times \langle 0,1 \rangle$$

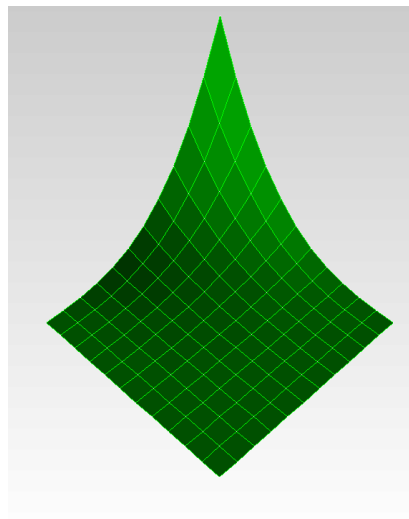
reprezentuje **bikubickú Bezierovu plochu**.

Vlastnosti Bezierovej bikubickej plochy:

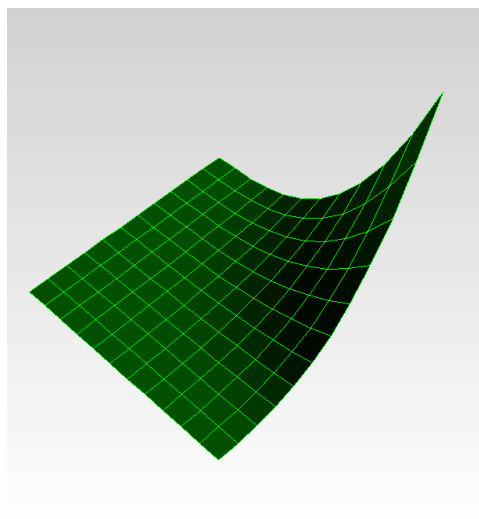
- Riadiaca sieť: body $\mathbf{V}_{ij}, i = 0, 1, 2, 3, j = 0, 1, 2, 3$



- Konvexný obal: nezápornosť: $B_{i3}(u) \cdot B_{j3}(v) \geq 0 \quad i = 0, 1, 2, 3, j = 0, 1, 2, 3$;
(obr. a/ $B_{03}(u) \cdot B_{03}(v)$ b/ $B_{03}(u) \cdot B_{33}(v)$)



a/



b/

$$\text{rozklad jednotky: } \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 B_{i3}(u) \cdot B_{j3}(v) = 1$$

Bezierova bikubicná plocha leží v konvexnom obale určenom riadiacimi bodmi $\mathbf{V}_{ij}, i = 0, 1, 2, 3, j = 0, 1, 2, 3$

- Izoparametrické čiary :

u- čiara: $v = v_k$

$$\mathbf{b}(u, v_k) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 B_{i3}(u) \cdot B_{j3}(v_k) \cdot \mathbf{V}_{ij} = \sum_{i=0}^3 \left[\sum_{j=0}^3 B_{j3}(v_k) \cdot \mathbf{V}_{ij} \right] B_{i3}(u) = \sum_{i=0}^3 \mathbf{W}_i(v_k) B_{i3}(u)$$

je Bezierova kubika s riadiacimi bodmi $\mathbf{W}_i(v_k) = \sum_{j=0}^3 \mathbf{V}_{ij} B_{j3}(v_k)$

v- čiara: $u = u_k$

$$\mathbf{b}(u_k, v) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 B_{i3}(u_k) \cdot B_{j3}(v) \cdot \mathbf{V}_{ij} = \sum_{j=0}^3 \left[\sum_{i=0}^3 B_{i3}(u_k) \cdot \mathbf{V}_{ij} \right] B_{j3}(v) = \sum_{j=0}^3 \mathbf{Q}_j(u_k) B_{j3}(v)$$

je Bezierova kubika s riadiacimi bodmi $\mathbf{Q}_j(u_k) = \sum_{i=0}^3 \mathbf{V}_{ij} B_{i3}(u_k)$

- Okrajové čiary plochy

u- čiary :

$$\mathbf{b}(u, 0) = \sum_{i=0}^3 B_{i3}(u) \mathbf{V}_{i0}$$

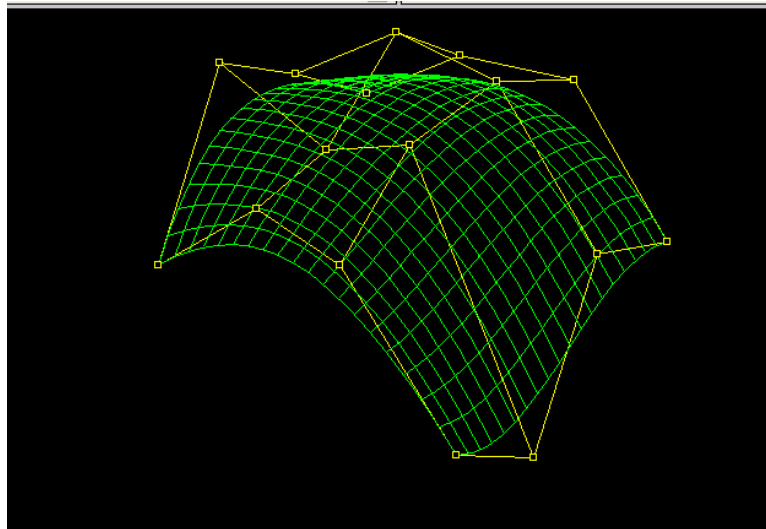
$$\mathbf{b}(u, 1) = \sum_{i=0}^3 B_{i3}(u) \mathbf{V}_{i3}$$

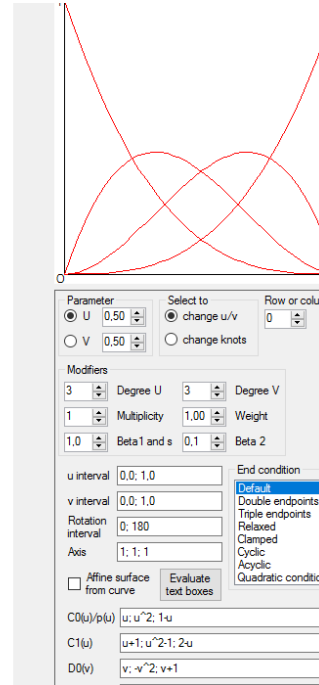
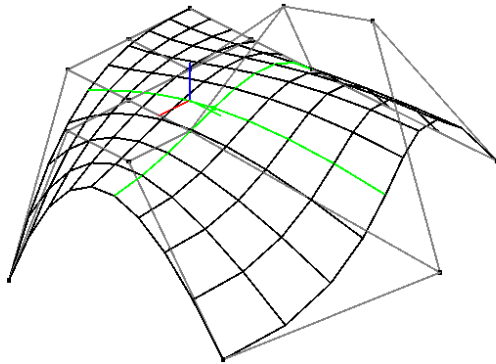
v- čiary :

$$\mathbf{b}(0, v) = \sum_{j=0}^3 B_{j3}(v) \mathbf{V}_{0j}$$

$$\mathbf{b}(1, v) = \sum_{j=0}^3 B_{j3}(v) \mathbf{V}_{3j}$$

- Rohové body plochy: $\mathbf{b}(0, 0) = \mathbf{V}_{00}$, $\mathbf{b}(1, 0) = \mathbf{V}_{30}$, $\mathbf{b}(0, 1) = \mathbf{V}_{03}$, $\mathbf{b}(1, 1) = \mathbf{V}_{33}$ sú body riadiacej siete, ktoré ležia na Bezierovej ploche t.j. plocha ich interpoluje. Ostatné body riadiacej siete plocha aproximuje.





• Derivácie Bezierovej bikubickej plochy

v smere parametra u :

$$\frac{\partial \mathbf{b}(u, v)}{\partial u} = \begin{bmatrix} B_{03}'(u) & B_{13}'(u) & B_{23}'(u) & B_{33}'(u) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{00} & \mathbf{V}_{01} & \mathbf{V}_{02} & \mathbf{V}_{03} \\ \mathbf{V}_{10} & \mathbf{V}_{11} & \mathbf{V}_{12} & \mathbf{V}_{13} \\ \mathbf{V}_{20} & \mathbf{V}_{21} & \mathbf{V}_{22} & \mathbf{V}_{23} \\ \mathbf{V}_{30} & \mathbf{V}_{31} & \mathbf{V}_{32} & \mathbf{V}_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} B_{03}(v) \\ B_{13}(v) \\ B_{23}(v) \\ B_{33}(v) \end{bmatrix} =$$

$$= 3[B_{02}(u) \quad B_{12}(u) \quad B_{22}(u)] \begin{bmatrix} \Delta^{1,0} \mathbf{V}_{00} & \Delta^{1,0} \mathbf{V}_{01} & \Delta^{1,0} \mathbf{V}_{02} & \Delta^{1,0} \mathbf{V}_{03} \\ \Delta^{1,0} \mathbf{V}_{10} & \Delta^{1,0} \mathbf{V}_{11} & \Delta^{1,0} \mathbf{V}_{12} & \Delta^{1,0} \mathbf{V}_{13} \\ \Delta^{1,0} \mathbf{V}_{20} & \Delta^{1,0} \mathbf{V}_{21} & \Delta^{1,0} \mathbf{V}_{22} & \Delta^{1,0} \mathbf{V}_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{03}(v) \\ B_{13}(v) \\ B_{23}(v) \\ B_{33}(v) \end{bmatrix}$$

kde $\Delta^{1,0} \mathbf{V}_{ij} = \mathbf{V}_{i+1,j} - \mathbf{V}_{i,j}$. Pretože $\Delta^{1,0} \mathbf{V}_{ij}$ sú vektory, sú uvedené parciálne derivácie Bezierovou plochou 2 x 3 na vektorovej zložke (nie na bodovej).

v smere parametra v :

$$\frac{\partial \mathbf{b}(u, v)}{\partial v} = [B_{03}(u) \quad B_{13}(u) \quad B_{23}(u) \quad B_{33}(u)] \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{00} & \mathbf{V}_{01} & \mathbf{V}_{02} & \mathbf{V}_{03} \\ \mathbf{V}_{10} & \mathbf{V}_{11} & \mathbf{V}_{12} & \mathbf{V}_{13} \\ \mathbf{V}_{20} & \mathbf{V}_{21} & \mathbf{V}_{22} & \mathbf{V}_{23} \\ \mathbf{V}_{30} & \mathbf{V}_{31} & \mathbf{V}_{32} & \mathbf{V}_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} B_{03}'(v) \\ B_{13}'(v) \\ B_{23}'(v) \\ B_{33}'(v) \end{bmatrix}$$

$$= 3[B_{03}(u) \quad B_{13}(u) \quad B_{23}(u) \quad B_{33}(u)] \begin{bmatrix} \Delta^{0,1} \mathbf{V}_{00} & \Delta^{0,1} \mathbf{V}_{01} & \Delta^{0,1} \mathbf{V}_{02} \\ \Delta^{0,1} \mathbf{V}_{10} & \Delta^{0,1} \mathbf{V}_{11} & \Delta^{0,1} \mathbf{V}_{12} \\ \Delta^{0,1} \mathbf{V}_{20} & \Delta^{0,1} \mathbf{V}_{21} & \Delta^{0,1} \mathbf{V}_{22} \\ \Delta^{0,1} \mathbf{V}_{30} & \Delta^{0,1} \mathbf{V}_{31} & \Delta^{0,1} \mathbf{V}_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{02}(v) \\ B_{12}(v) \\ B_{22}(v) \end{bmatrix}$$

kde $\Delta^{0,1} \mathbf{V}_{ij} = \mathbf{V}_{i,j+1} - \mathbf{V}_{i,j}$ a opäť $\Delta^{0,1} \mathbf{V}_{ij}$ sú vektory, teda uvedené parciálne derivácie sú Bezierovou plochou 3 x 2 na vektorovej zložke.

Vyčíslime derivácie v rohových bodoch:

v smere parametra u :

$$\mathbf{b}_u(0,0) = 3(\mathbf{V}_{10} - \mathbf{V}_{00}), \quad \mathbf{b}_u(1,0) = 3(\mathbf{V}_{30} - \mathbf{V}_{20}), \quad \mathbf{b}_u(0,1) = 3(\mathbf{V}_{13} - \mathbf{V}_{03}), \quad \mathbf{b}_u(1,1) = 3(\mathbf{V}_{33} - \mathbf{V}_{23})$$

v smere parametra v :

$$\mathbf{b}_v(0,0) = 3(\mathbf{V}_{01} - \mathbf{V}_{00}), \quad \mathbf{b}_v(1,0) = 3(\mathbf{V}_{31} - \mathbf{V}_{30}), \quad \mathbf{b}_v(0,1) = 3(\mathbf{V}_{03} - \mathbf{V}_{02}), \quad \mathbf{b}_v(1,1) = 3(\mathbf{V}_{33} - \mathbf{V}_{32})$$

• Zmiešané derivácie Bezierovej bikubickej plochy , vektory twistov

$$\frac{\partial^2 \mathbf{b}(u, v)}{\partial u \partial v} = [B_{03}'(u) \quad B_{13}'(u) \quad B_{23}'(u) \quad B_{33}'(u)] \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{00} & \mathbf{V}_{01} & \mathbf{V}_{02} & \mathbf{V}_{03} \\ \mathbf{V}_{10} & \mathbf{V}_{11} & \mathbf{V}_{12} & \mathbf{V}_{13} \\ \mathbf{V}_{20} & \mathbf{V}_{21} & \mathbf{V}_{22} & \mathbf{V}_{23} \\ \mathbf{V}_{30} & \mathbf{V}_{31} & \mathbf{V}_{32} & \mathbf{V}_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} B_{03}'(v) \\ B_{13}'(v) \\ B_{23}'(v) \\ B_{33}'(v) \end{bmatrix}$$

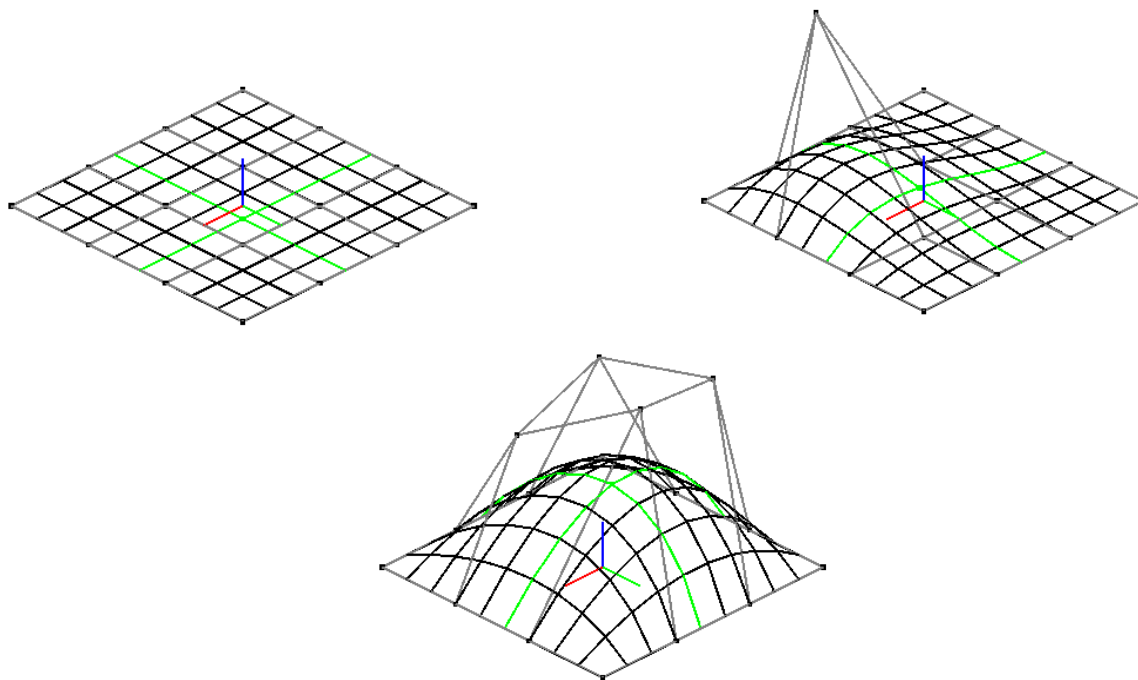
$$= 3.3[B_{02}(u) \quad B_{12}(u) \quad B_{22}(u)] \begin{bmatrix} \Delta^{1,1} \mathbf{V}_{00} & \Delta^{1,1} \mathbf{V}_{01} & \Delta^{1,1} \mathbf{V}_{02} \\ \Delta^{1,1} \mathbf{V}_{10} & \Delta^{1,1} \mathbf{V}_{11} & \Delta^{1,1} \mathbf{V}_{12} \\ \Delta^{1,1} \mathbf{V}_{20} & \Delta^{1,1} \mathbf{V}_{21} & \Delta^{1,1} \mathbf{V}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{02}(v) \\ B_{12}(v) \\ B_{22}(v) \end{bmatrix}$$

kde $\Delta^{1,1} \mathbf{V}_{ij} = \mathbf{V}_{i+1,j+1} - \mathbf{V}_{i+1,j} - \mathbf{V}_{i,j+1} + \mathbf{V}_{i,j}$ a opäť $\Delta^{1,1} \mathbf{V}_{ij}$ sú vektory, teda uvedené zmiešané parciálne derivácie sú Bezierovou plochou 2 x 2 na vektorovej zložke.

Vektory twistov v rohových bodoch Bezierovej bikubickej plochy:

$$\mathbf{b}_{uv}(0,0) = 9 \Delta^{1,1} \mathbf{V}_{00}, \quad \mathbf{b}_{uv}(1,0) = 9 \Delta^{1,1} \mathbf{V}_{20}, \quad \mathbf{b}_{uv}(0,1) = 9 \Delta^{1,1} \mathbf{V}_{02}, \quad \mathbf{b}_{uv}(1,1) = 9 \Delta^{1,1} \mathbf{V}_{22}$$

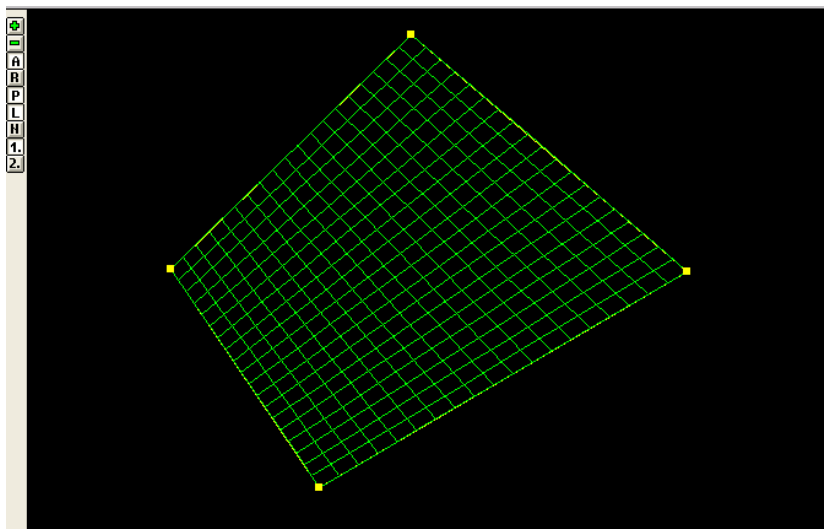
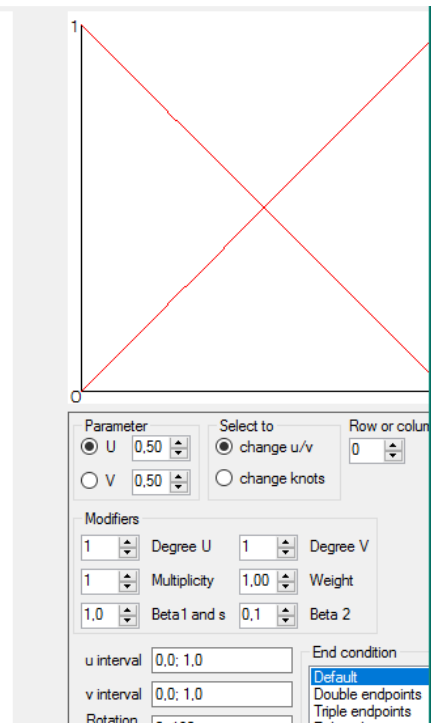
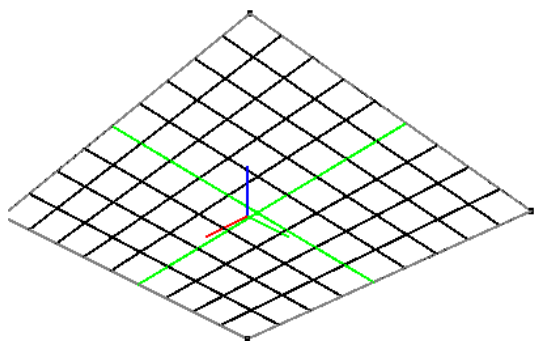
Na obr. A je Bezierova bikubická záplata s nulovými twistami (všetkými) a na obr. B s jedným nenulovým twistom a na obr. C so štyrmi nenulovými vektormi twistov, ostatné riadiace body siete sú zhodné



Bilineárna Bezierova záplata

Je plocha určená bilineárnou interpoláciou riadiacich bodov \mathbf{V}_{ij} , $i = 0, 1$, $j = 0, 1$:

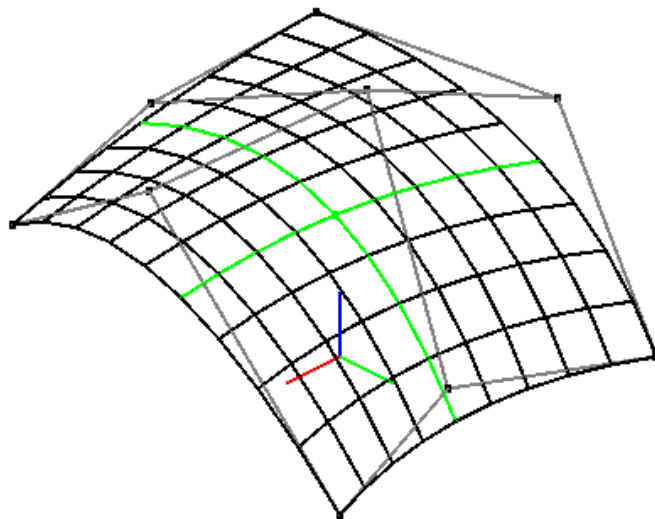
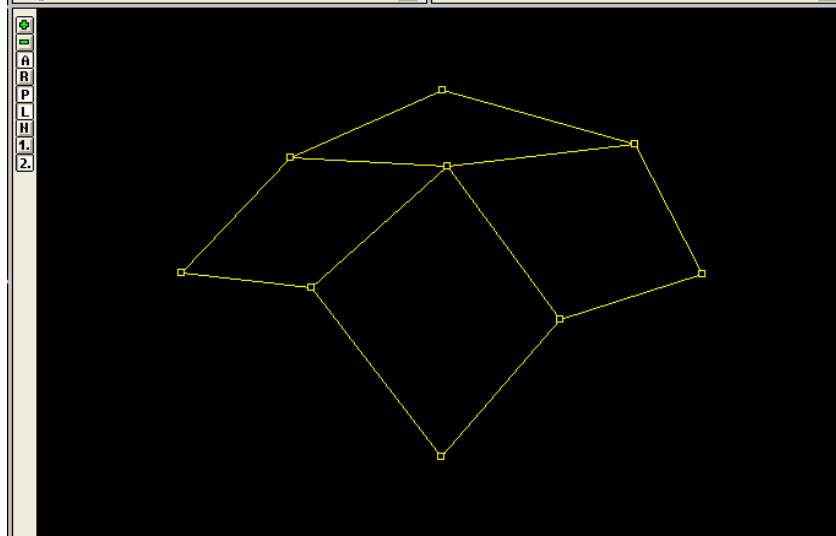
$$\begin{aligned} \mathbf{b}_{1,1}(u, v) &= \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 \mathbf{V}_{ij} B_{i,1}(u) B_{j,1}(v) = (1-u)(1-v)\mathbf{V}_{00} + (1-u)v\mathbf{V}_{01} + u(1-v)\mathbf{V}_{10} + uv\mathbf{V}_{11} = \\ &= [1-u \quad u] \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{00} & \mathbf{V}_{01} \\ \mathbf{V}_{10} & \mathbf{V}_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-v \\ v \end{bmatrix}. \end{aligned}$$



Bikvadratická Bezierova záplata

Parametrické vyjadrenie pre riadiace body: $\mathbf{V}_{ij}, i = 0, 1, 2, j = 0, 1, 2$:

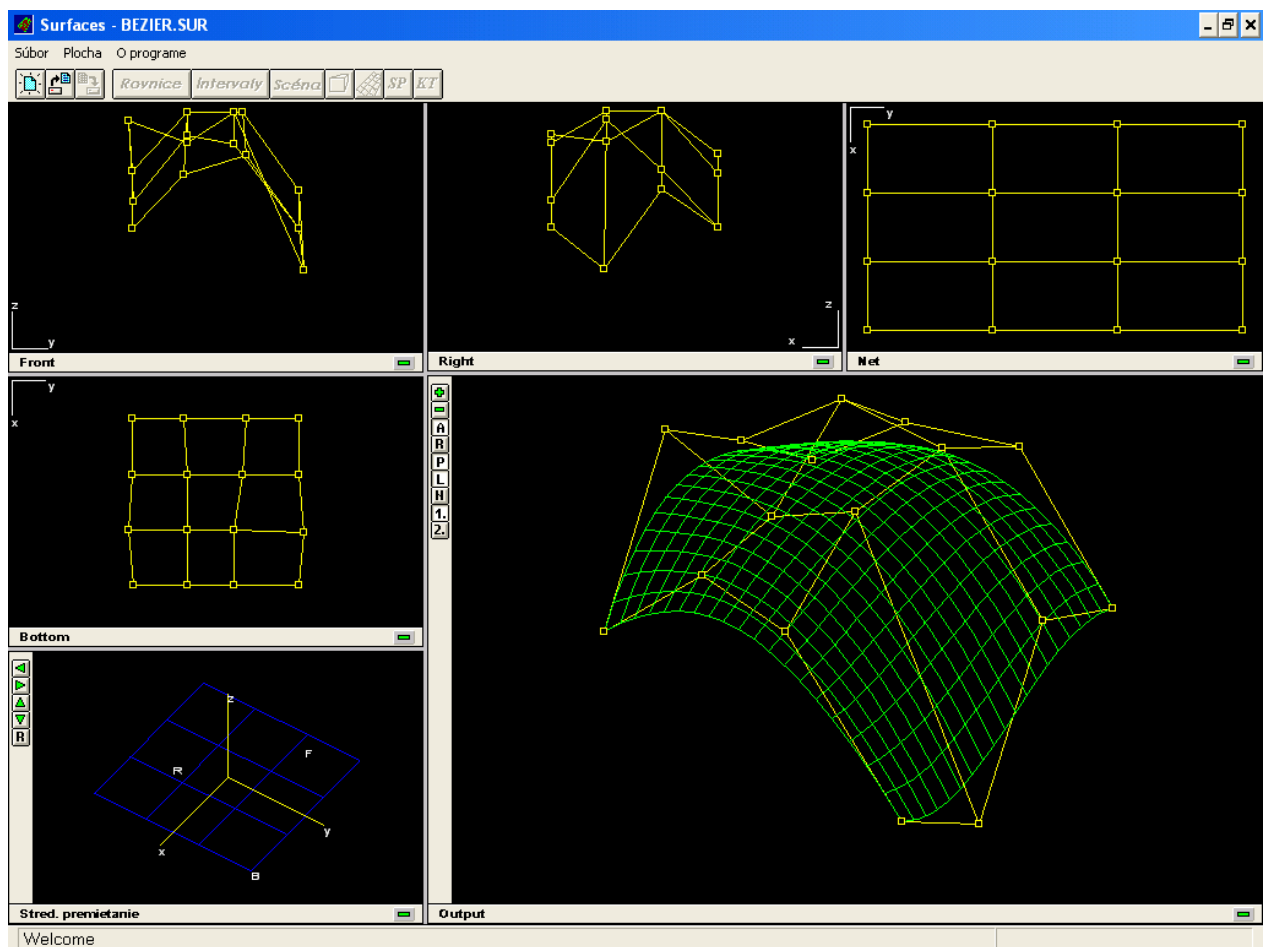
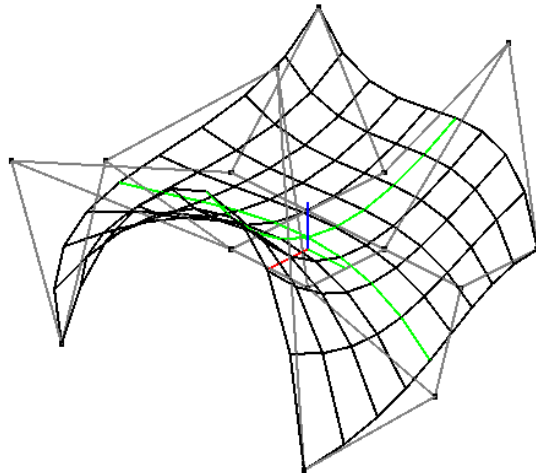
$$\mathbf{b}_{2,2}(u, v) = \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^2 \mathbf{V}_{ij} B_{i,2}(u) B_{j,2}(v)$$



Bikubická Bezierova záplata

Riadiaca sieť má body $\mathbf{V}_{ij}, i = 0, 1, 2, 3, j = 0, 1, 2, 3$ a parametrické vyjadrenie:

$$\mathbf{b}_{3,3}(u, v) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 B_{i3}(u) \cdot B_{j3}(v) \cdot \mathbf{V}_{ij}$$



B-splajnová bikubická záplata

Zmiešavacie funkcie $f_i(u)$, $g_j(v)$ sú B-splajnové kubické funkcie . Teda vektorová rovnica:

$$\mathbf{s}(u, v) = \begin{bmatrix} N_{03}(u) & N_{13}(u) & N_{23}(u) & N_{33}(u) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{00} & \mathbf{V}_{01} & \mathbf{V}_{02} & \mathbf{V}_{03} \\ \mathbf{V}_{10} & \mathbf{V}_{11} & \mathbf{V}_{12} & \mathbf{V}_{13} \\ \mathbf{V}_{20} & \mathbf{V}_{21} & \mathbf{V}_{22} & \mathbf{V}_{23} \\ \mathbf{V}_{30} & \mathbf{V}_{31} & \mathbf{V}_{32} & \mathbf{V}_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} N_{03}(v) \\ N_{13}(v) \\ N_{23}(v) \\ N_{33}(v) \end{bmatrix}$$

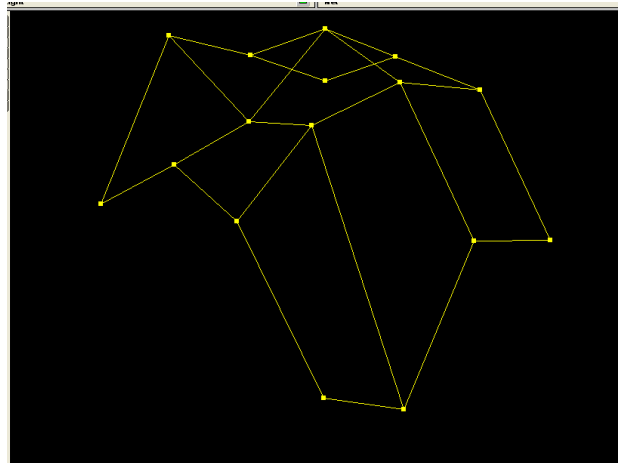
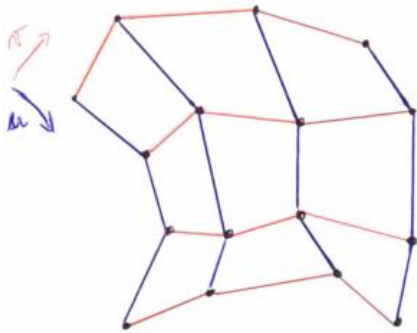
resp.

$$\mathbf{s}(u, v) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 N_{i3}(u) \cdot N_{j3}(v) \cdot \mathbf{V}_{ij} = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 N_{ij}(u, v) \mathbf{V}_{ij}, u, v \in \langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle$$

reprezentuje *bikubickú B-splajnovú záplatu*.

Vlastnosti B-splajnovej bikubickej záplaty:

- riadiaca sieť : body \mathbf{V}_{ij} , $i = 0, 1, 2, 3$, $j = 0, 1, 2, 3$



- konvexný obal: nezápornosť: $N_{i3}(u) \cdot N_{j3}(v) \geq 0$ $i = 0, 1, 2, 3$, $j = 0, 1, 2, 3$;

$$\text{rozklad jednotky: } \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 N_{i3}(u) \cdot N_{j3}(v) = 1$$

B-splajnová bikubická záplata leží v konvexnom obale určenom riadiacimi bodmi \mathbf{V}_{ij} , $i = 0, 1, 2, 3$, $j = 0, 1, 2, 3$ riadiacej siete.

- izoparametrické čiary :

u- čiara: $v = v_k$

$$\mathbf{s}(u, v_k) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 N_{i3}(u) \cdot N_{j3}(v_k) \cdot \mathbf{V}_{ij} = \sum_{i=0}^3 \left[\sum_{j=0}^3 N_{j3}(v_k) \cdot \mathbf{V}_{ij} \right] N_{i3}(u) = \sum_{i=0}^3 \mathbf{W}_i(v_k) N_{i3}(u)$$

je B-splajnová kubika s riadiacimi bodmi $\mathbf{W}_i(v_k) = \sum_{j=0}^3 \mathbf{V}_{ij} N_{j3}(v_k)$

v- čiara : $u = u_k$

$$\mathbf{s}(u_k, v) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 N_{i3}(u_k) \cdot N_{j3}(v) \cdot \mathbf{V}_{ij} = \sum_{j=0}^3 \left[\sum_{i=0}^3 N_{i3}(u_k) \cdot \mathbf{V}_{ij} \right] N_{j3}(v) = \sum_{j=0}^3 \mathbf{Q}_j(u_k) N_{j3}(v)$$

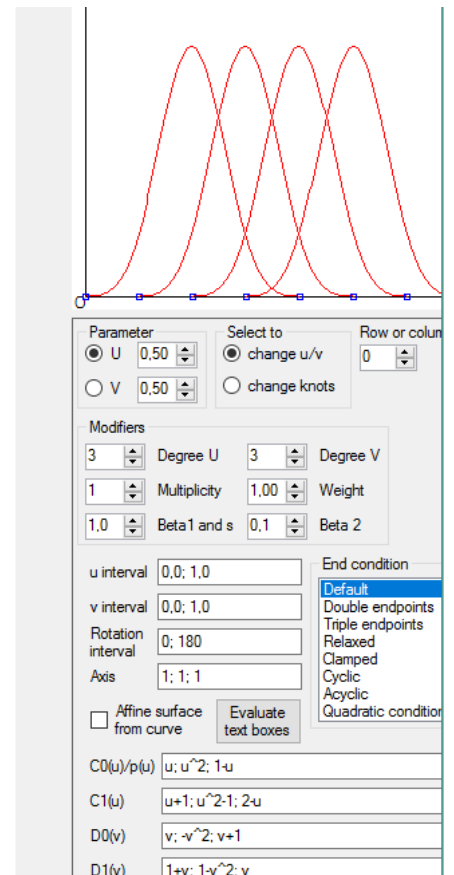
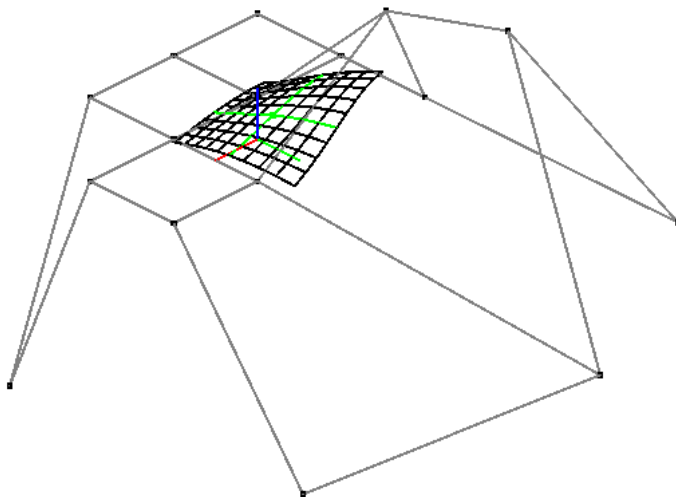
je B-splajnová kubika s riadiacimi bodmi $\mathbf{Q}_j(u_k) = \sum_{i=0}^3 \mathbf{V}_{ij} N_{i3}(u_k)$

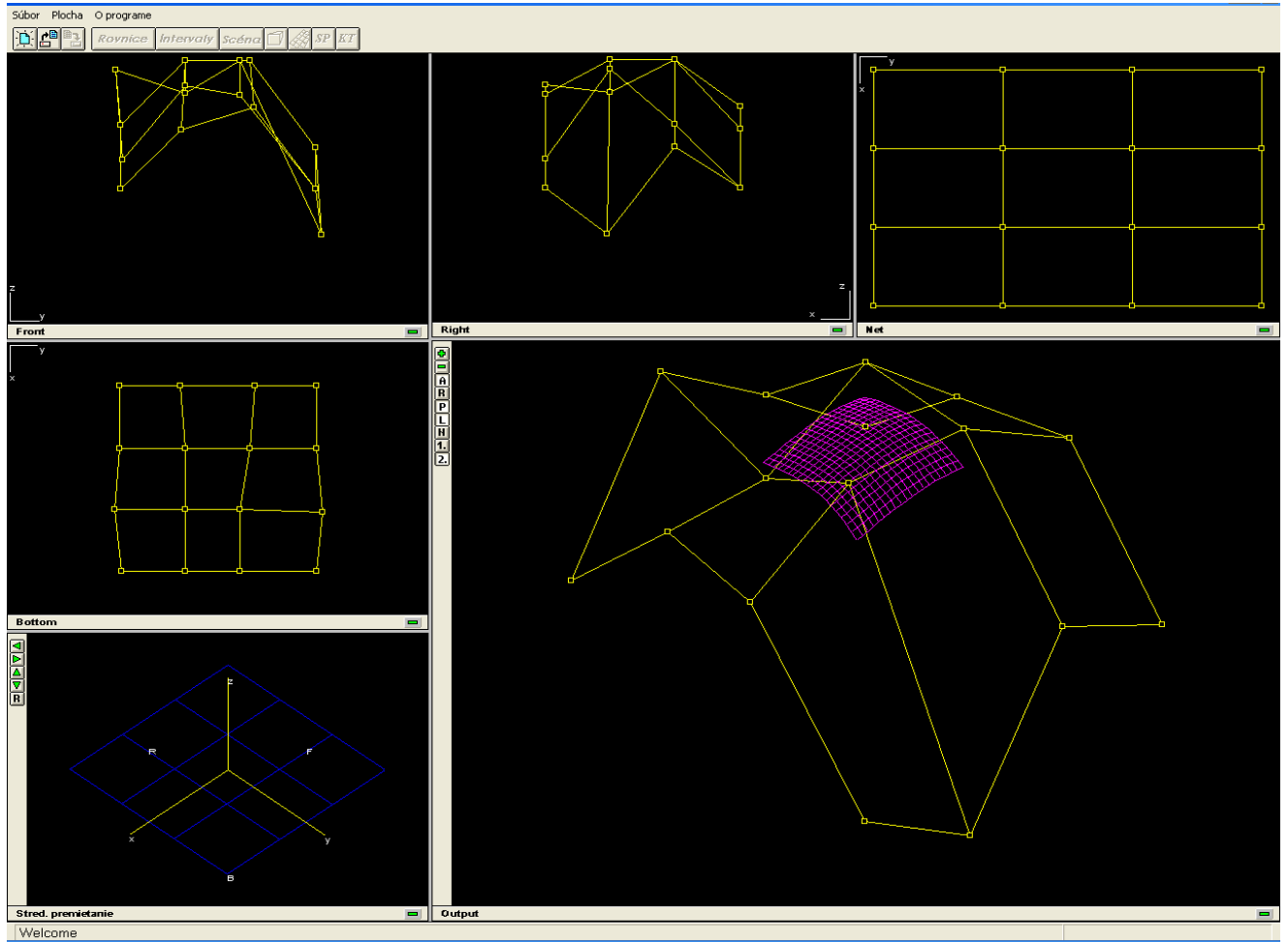
- okrajové čiary záplaty

u- čiary : $\mathbf{s}(u, 0)$ $\mathbf{s}(u, 1)$

v- čiary : $\mathbf{s}(0, v)$ $\mathbf{s}(1, v)$

- rohové body záplaty: $\mathbf{s}(0, 0)$, $\mathbf{s}(1, 0)$, $\mathbf{s}(0, 1)$, $\mathbf{s}(1, 1)$.





B-splajnová plocha $m \times n$

B-splajnová bikubická záplata môže byť jedným segmentom B-splajnovej plochy s riadiacou sieťou bodov $\mathbf{V}_{ij}, i = 0, \dots, m, j = 0, \dots, n$, ktorá je definovaná:

$$\mathbf{s}(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n N_{ip}(u) \cdot N_{jq}(v) \cdot \mathbf{V}_{ij}$$

s uzlovými vektormi: $U = \{u_0, \dots, u_r\}, r = m + p + 1, V = \{v_0, \dots, v_s\}, s = n + q + 1$.

V našom prípade $p = q = 3$. Konštrukcia a vlastnosti B-splajnových plôch i vyčísl'ovanie bodov plochy pomocou de Boorovho algoritmu, ktorý sme si uviedli pri B-splajnových krivkách je v prácach: Piegl: The NURBS-book; Hoschek, Lasser: Fundamentals of CAGD a iných.

Racionálna bikubická Bezierova a B-splajnová záplata

V súlade s konštrukciou racionálnych Bezierových a B-splajnových kriviek, teraz riadiace body siete $\mathbf{V}_{ij}, i = 0, 1, 2, 3, j = 0, 1, 2, 3$ doplníme váhami $w_{ij}, w_{ij} > 0$, a získame rozšírené afinné

súradnice riadiacich bodov siete: $\mathbf{V}_{ij}^w = (w_{ij}x_{ij}, w_{ij}y_{ij}, w_{ij}z_{ij}, w_{ij}) = (w_{ij}\mathbf{V}_{ij}, w_{ij})$.

Racionálna bikubická Bezierova plocha je stredový priemet Bezierovej plochy tenzorového súčinnu:

$$\mathbf{b}^w(u, v) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 B_{i3}(u) \cdot B_{j3}(v) \cdot \mathbf{V}_{ij}^w \quad u, v \in \langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle$$

do nadroviny s rovnicou $w = 1$:

$$\mathbf{rb}(u, v) = \frac{\sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 B_{i3}(u) \cdot B_{j3}(v) \cdot w_{ij} \mathbf{V}_{ij}}{\sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 B_{i3}(u) \cdot B_{j3}(v) \cdot w_{ij}} =$$

$$= \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 R_{ij}(u, v) \cdot \mathbf{V}_{ij} \quad u, v \in \langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle \quad \text{kde } R_{ij}(u, v) = \frac{B_{i3}(u) \cdot B_{j3}(v) \cdot w_{ij}}{\sum_{r=0}^3 \sum_{s=0}^3 B_{r3}(u) \cdot B_{s3}(v) \cdot w_{rs}}$$

sú racionálne funkcie, ale nie sú súčinnom zmiešavacích funkcií. Teda plocha $\mathbf{r}(u, v)$ nie je plochou tenzorového súčinnu ale plocha $\mathbf{r}^w(u, v)$ je plochou tenzorového súčinnu.

Predpokladajme, že váhy $w_{ij} > 0$ pre každé i, j , potom vlastnosti uvedené pri neracionálnych Bezierových plochách môžeme uviesť aj pri racionálnej Bezierovej ploche:

- riadiaca sieť
- konvexný obal
- izoparametrické čiary
- okrajové čiary plochy
- rohové body plochy

Vyčísl'ovanie bodov

- racionálny Casteljau algoritmus je aplikovaný na izoparametrické čiary plochy.

NURBS- bikubická záplata sa získa ako stredový priemet segmentu B-splajnovej plochy:

$$\mathbf{s}^w(u, v) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 N_{i3}(u) \cdot N_{j3}(v) \cdot \mathbf{V}_{ij}^w \quad u, v \in \langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle$$

do nadroviny s rovnicou $w = 1$:

$$\begin{aligned} \mathbf{s}(u, v) &= \frac{\sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 N_{i3}(u) \cdot N_{j3}(v) \cdot w_{ij} \mathbf{V}_{ij}}{\sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 N_{i3}(u) \cdot N_{j3}(v) \cdot w_{ij}} = \\ &= \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 R_{ij}(u, v) \cdot \mathbf{V}_{ij} \quad u, v \in \langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle \text{ kde } R_{ij}(u, v) = \frac{N_{i3}(u) \cdot N_{j3}(v) \cdot w_{ij}}{\sum_{r=0}^3 \sum_{s=0}^3 N_{r3}(u) \cdot N_{s3}(v) \cdot w_{rs}}. \end{aligned}$$

Vlastnosti tejto záplaty ako segmentu NURBS-plochy sú podrobne uvedené v práci Piegl: The NURBS-book.