PODMIENKY SPOJITOSTI SPLAJNOVÝCH KRIVIEK

Pri projektovaní (navrhovaní) objektov sa splajnom rozumie šablóna – ohybný prút, ktorý sa používal konštruktérmi na vykresľovanie hladkých kriviek prechádzajúcich zadanou množinou bodov v rovine , či priestore.

Pri matematickom opise takejto hladkej krivky sa využíva čiastková polynomická krivka 3° (kubika), ktorá má v spojoch a teda všade spojitú prvú a druhú deriváciu. Čiastková polynomická krivka sa skladá zo segmentov – jednoduchých oblúkov, ktoré v spojovacích bodoch spĺňajú určité dopredu predpísané podmienky na hladkosť (spojitosť). Existuje mnoho splajnových kriviek, ktoré sa líšia v závislosti od použitých polynómov (blending functions) a typu podmienok položených na hraničné body jednotlivých segmentov. Tieto podmienky závisia od charakteru aplikácií, pri ktorých sa používajú.

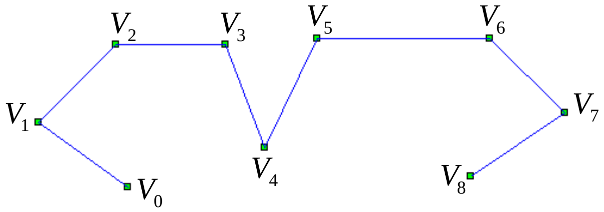
Medzi hlavné oblasti využitia splajnových kriviek v počítačovej grafike patrí:

1. navrhovanie kriviek s možnosťou lokálnej modifikácie
2. digitalizácia kresieb pre potreby ich uloženia
3. opis animačných dráh objektov a kamier.

Typické CAD-aplikácie splajnov: návrhy karosérií automobilov, trupov lietadiel a lodí, automatické vyrezávanie dielcov a ich ukladanie (rozmiestňovanie) za účelom efektívneho využitia materiálu.

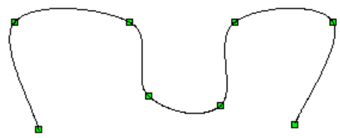
V súvislosti s navrhovaním splajnových kriviek sa stretávame s úlohami dvojakého typu. Ak máme zostrojiť- vymodelovať krivku určitého stupňa prechádzajúcu danými bodmi, tak hovoríme, že máme riešiť interpolačnú úlohu. O aproximačnej úlohe hovoríme vtedy, keď chceme zostrojiť krivku prechádzajúcu v „neveľkej“ vzdialenosti od všetkých zadaných bodov. Pri riešení úlohy jedného typu, často hovoríme, že máme za úlohu vymodelovať krivku k daným bodom (určenú danými bodmi).

Z matematického hľadiska sa interpolačné úlohy riešia jednoduchšie ako aproximačné. Z hľadiska aplikácie majú aproximačné úlohy (resp. ich riešenia) väčší význam, pretože pojem „presných“ hodnôt je z rôznych dôvodov iluzórny. Pri aproximačných úlohách je istým problémom výber kritéria charakterizujúceho kvalitu priblíženia. Preto sa často volí kompromis medzi tým, čo sa intuitívne zdá byť želateľným a tým, čo je reálne z numerického hľadiska. Akýmsi kompromisným riešením pri rozhodovaní sa pre jednu z uvedených metód je konštruovanie kriviek k zadanej postupnosti tzv. riadiacich bodov (control points) krivky, ktoré sa volia tak, aby lomená čiara vytvorená ich postupným pospájaním tzv. riadiaci polygón (control polygon) alebo riadiaci graf (control graph) bola tvarovou aproximáciou navrhovanej krivky.

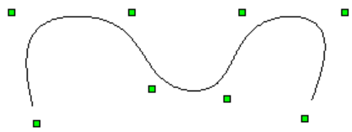


Zadané riadiace body sú „pospájané“ čiastkovou polynomickou krivkou jedným z nasledujúcich dvoch spôsobov.

1. krivka prechádza každým zadaným riadiacim bodom t.j. všetky riadiace body ležia na vytváranej krivke, takáto krivka sa nazýva interpolačná (**interpolačný splajn**).



2. krivka neprechádza všetkými riadiacimi bodmi (špeciálne žiadnym) t.j. všetky riadiace body nemusia ležať na vytváranej krivke, a krivka hladko sleduje tvar riadiaceho polygónu; vtedy sa krivka nazýva aproximačná (**aproximačný splajn**) .



Najčastejšie použitie kriviek oboch typov:

interpolačné: digitalizácia kresieb, opis dráhy animovaných objektov

aproximačné: ako dizajnové nástroje na opis povrchov konštruovaných objektov.

Proces navrhovania:

Splajnová krivka sa definuje, modifikuje a manipuluje prostredníctvom operácií na jej riadiacich bodoch. Po interaktívnej voľbe polohy riadiacich bodov v súlade s predstavou návrhára o tvare krivky, návrhár pomocou polynomického opisu skonštruuje z nich východziu krivku, ktorú aj zobrazí. Ak nie je s jej tvarom spokojný, zmenou polohy niektorých, prípadne aj všetkých riadiacich bodov zrekonštruuje pôvodný tvar a uvedie ho do súladu so svojou predstavou (väčšinou cez lokálne modifikácie). Navyše krivku pomocou geometrických transformácií (posunutie, rotácia, škálovanie a pod) aplikovaných na riadiace body rozmerovo upraví a premiestni do požadovanej polohy.

Väčšina splajnových kriviek, ktoré sa používajú v geometrickom modelovaní je navrhnutá tak, aby sa krivka nachádzala v konvexnom obale svojich riadiacich bodov (ide o najmenšiu konvexnú množinu, ktorá ich obsahuje; praktická pomôcka – guma „natiahnutá“ na vrcholy). Splajnové krivky, ktoré majú túto vlastnosť hladko sledujú riadiaci polygón krivky bez nežiaducich oscilácií. Táto vlastnosť je tiež užitočná v aplikáciách súvisiacich s orezávaním oblastí. Existujú však aplikácie, v ktorých táto vlastnosť nie je žiaduca, lebo vedia využiť napr. výskyt nepredvídaných slučiek a iných netypických tvarov.

Najskôr sme sa zaoberali jednoduchými krivkami - jednoduchými oblúkmi tzv. polynomickými krivkami (Hermit, Bezier) a teraz opíšeme postup pre určenie splajnových kriviek vytvorených zo segmentov jednoduchých oblúkov, ktoré v spojovacích bodoch spĺňajú určité dopredu predpísané podmienky na hladkosť – spojitosť (Hermitov splajn, kardinálny splajn, Beta-splajn, B-splajn, NURBS-splajn).

Pri riešení úloh praxe sa ukazuje, že jednoduché oblúky Hermita či Beziera nie vždy dostatočne spĺňajú požiadavky (predstavy) návrhára na tvar výslednej krivky. Získaná krivka môže dosť „zle“ aproximovať zadané body riadiaceho polygónu (veľmi „ďaleko“).

Ukazuje sa preto vhodnejšie vytvoriť celú krivku z viacerých segmentov – jednoduchých oblúkov. Pričom jednotlivé segmenty majú rovnaký stupeň tj. ich zmiešavacie funkcie sú rovnakého stupňa. Znamená to, že výsledná krivka bude „zošitá“ zo segmentov, ale k tomu, aby bola „pekná - hladká“ je potrebné zadať podmienky spojitosti v bode spájania dvoch segmentov.

A.Parametrická spojitosť

Na zabezpečenie hladkého prechodu z jedného segmentu čiastkovej polynomickej krivky na druhý, môžeme využiť rôzne podmienky spojitosti v spojovacích bodoch segmentov. Ak každý segment krivky je opísaný bodovou parametrickou funkciou tvaru:

$$^{i}X(u), u_i \le u \le u_{i+1},$$

alebo sústavou parametrických súradnicových funkcií tvaru:

$$x = {}^{i}x(u); \quad y = {}^{i}y(u); \quad z = {}^{i}z(u); \quad u \in \langle u_i, u_{i+1} \rangle,$$

môžeme parametrickú spojitosť krivky zabezpečiť stotožnením parametrických derivácií (t.j. derivácií podľa parametra u funkcie $^{i}X(u)$ resp. všetkých troch súradnicových funkcií $^{i}x(u)$, $^{i}y(u)$, $^{i}z(u)$) každých dvoch susediacich krivkových segmentov v ich spoločnom hraničnom bode, pričom deriváciou rozumieme aj 0-tú deriváciu.

Ak teda predpokladáme, že:

$^{0}X(u), u \in \langle u_0, u_1 \rangle$ $({}^{0}x(u),\ {}^{0}y(u),\ {}^{0}z(u);\quad u \in \langle u_0, u_1 \rangle)$ a

$^{1}X(u), u \in \langle v_0, v_1 \rangle$ $({}^{1}x(u),\ {}^{1}y(u),\ {}^{1}z(u);\quad u \in \langle v_0, v_1 \rangle)$,

pričom môže byť napr. $\langle v_0, v_1 \rangle = \langle u_1, u_2 \rangle$, kde $u_0 < u_1 < u_2$ tak, podmienky parametrickej spojitosti možno zapísať takto:

1°.parametrická spojitosť 0-tého rádu , alebo **C^0-spojitosť**, znamená polohovú spojitosť t.j. splnenie podmienok:

(1) $^{0}X(u_1) = {}^{1}X(v_0)$ resp. $^{0}x(u_1) = {}^{1}x(v_0); {}^{0}y(u_1) = {}^{1}y(v_0); {}^{0}z(u_1) = {}^{1}z(v_0);$

2°.parametrická spojitosť 1-ho rádu , alebo **C^1-spojitosť**, je ekvivalentná spojitosti 0-tej a prvej derivácie, čiže splneniu podmienok (1) a tiež nasledujúcich:

(2) $^{0}X'(u_1) = {}^{1}X'(v_0)$ resp. $^{0}x'(u_1) = {}^{1}x'(v_0); {}^{0}y'(u_1) = {}^{1}y'(v_0); {}^{0}z'(u_1) = {}^{1}z'(v_0);$

3°.parametrická spojitosť 2-ho rádu , alebo **C^2-spojitosť**, je ekvivalentná spojitosti 0-tej, 1.a 2.derivácie, čiže splneniu podmienok (1), (2) a tiež nasledujúcej podmienky:

(3) $^{0}X''(u_1) = {}^{1}X''(v_0)$ resp. $^{0}x''(u_1) = {}^{1}x''(v_0); {}^{0}y''(u_1) = {}^{1}y''(v_0); {}^{0}z''(u_1) = {}^{1}z''(v_0);$.

V prípade parametrickej spojitosti 2-ho rádu je rýchlosť zmeny dotykového vektora v spoji dvoch segmentov rovnaká. Teda dotyčnica krivky hladko prechádza z jedného segmentu krivky na druhý. Ale u spojitosti 1.rádu rýchlosť zmeny dotykového vektora môže byť na susedných segmentoch úplne odlišná, čiže vo všeobecnosti sa tvary dvoch segmentov krivky môžu v okolí ich spoločného bodu výrazne líšiť. Spojitosť 1.rádu je často postačujúca pre digitalizáciu kresieb a niektoré dizajnérske aplikácie, zatiaľ čo spojitosť 2.rádu je užitočná pri opise animačných dráh pre pohyb kamery.

B.Geometrická spojitosť

V tomto, trochu nepresne povedané, nevyžadujeme rovnosť derivácií parametrických vyjadrení segmentov krivky v spojoch, ale iba ich úmernosť. Získame tým určité tvarovacie parametre, ktorými možno ovplyvňovať tvar krivky. Presnejšie:

1°.<u>geometrická spojitosť 0-tého rádu</u> resp. **G^0-spojitosť** je rovnaká ako C^0-spojitosť krivky t.j. dva susedné segmenty musia mať spoločný hraničný bod, inými slovami musí platiť (1). $G^0=C^0$.

2°.<u>geometrická spojitosť 1-ho rádu ,</u> alebo **G^1-spojitosť**, si okrem G^0-spojitosti vyžaduje, aby dva susedné segmenty mali vo svojom spoji úmerné 1.derivácie, čo je ekvivalentné spojitosti jednotkového dotykového vektora resp. existencii spoločnej dotyčnice v tomto bode. Matematická formulácia tejto podmienky je:

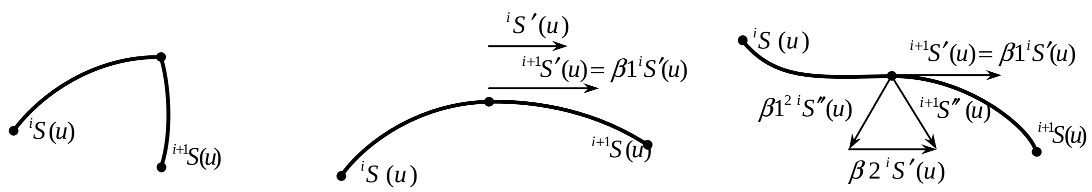
$$\exists\ \beta 1 \in \mathbb{R},\ \beta 1 > 0 :\ {}^1X'(v_0) = \beta 1\, {}^0X'(u_1)$$

3°.<u>geometrická spojitosť 2-ho rádu</u>, alebo **G^2-spojitosť**, si okrem G^0- a G^1-spojitosti vyžaduje, aby dva susedné segmenty krivky mali vo svojom spoločnom bode spojitý tzv. vektor krivosti, v dôsledku čoho majú v tomto bode spojitú aj 1.krivosť, ktorá je jeho absolútnou hodnotou.
Matematická formulácia tejto požiadavky pre susedné segmenty krivky je:

$$\exists\ \beta 2 \in \mathbb{R} :\ {}^1X''(v_0) = \beta 1^2\ {}^0X''(u_1) + \beta 2\ {}^0X'(u_1)$$

kde $\beta 1$, $\beta 2$ sú spomínanými tvarovacími parametrami.

Ak označíme ${}^0X(u)$ ako ${}^iS(u)$ a ${}^1X(u)$ ako ${}^{i+1}S(u)$, tak môžeme podmienky geometrickej spojitosti pre segmenty ${}^iS(u)$, ${}^{i+1}S(u)$ ilustrovať:



Krivka generovaná pomocou geometrickej spojitosti je dosť podobná krivke generovanej pomocou parametrickej spojitosti (pri voľbe $\beta 1=1$, $\beta 2=0$ sa dokonca stotožnia), ale vhodnými voľbami $\beta 1$, $\beta 2$ možno tieto odlišnosti upravovať.

POLYNOMICKÁ INTERPOLÁCIA – SPLAJN FUNKCIE

Nech $n\in N$ a $(x_0,y_0),...,(x_k,y_k)$ je postupnosť (k+1) bodov v rovine E^2, kde $a=x_0<x_1<...<x_k=b$. Funkciu $y=f(x),\ \ x\in\langle a,b\rangle$, nazveme po častiach polynomickou funkciou, PP-funkciou, splajnom stupňa n, na množine $x_0<x_1<...<x_k$, ak platí:

1° $f(x)={}^{i}p(x),\quad x\in\langle x_i,x_{i+1}\rangle$

2° ${}^{i}p^{(j)}(x_{i+1})={}^{i+1}p^{(j)}(x_{i+1}),\ \ i=0,...,k-2,\ j=0,...,r-1$.

Body $x_1,...,x_{k-1}$, ktoré delia interval $\langle a,b\rangle$ na k-intervalov sa nazývajú uzly (deliace body intervalu). Body $(x_1,y_1),...,(x_{k-1},y_{k-1})$ sa nazývajú spoje (body spojenia).

Kubické splajnové funkcie: *n*=3

$f(x)={}^{i}p(x)={}^{i}a_0+{}^{i}a_1(x-x_i)+{}^{i}a_2(x-x_i)^2+{}^{i}a_3(x-x_i)^3,\quad x\in\langle x_i,x_{i+1}\rangle.$

Nech $(x_0,y_0),...,(x_k,y_k)$ a $a=x_0<x_1<...<x_k=b$, t.j. máme k – intervalov a potrebujeme určiť k- polynómov 3°. Každý polynóm ${}^{i}p(x)$ má štyri koeficienty ${}^{i}a_0,{}^{i}a_1,{}^{i}a_2,{}^{i}a_3$ a teda potrebujeme určiť 4k polynomických koeficientov. Tieto koeficienty určíme pomocou podmienok 1° a 2°:

1°. prechádza k+1 bodmi $(x_0,y_0),...,(x_k,y_k)$: k+1 rovníc

2°. spojitosť 0.,1.a 2.derivácie v k-1spojoch: 3(k-1) rovníc.

Pre 4k neznámych poznáme (k+1)+ 3(k-1) = 4k-2 podmienok (rovníc). K jednoznačnému určeniu 4k neznámych doplníme dve rovnice, ktoré reprezentujú dve doplňujúce podmienky, ktoré sa zadávajú na krajoch intervalu $a=x_0$, $b=x_k$ a preto ich nazývame krajné, okrajové či hraničné podmienky.

Varianty zadávania krajných podmienok:

1.prvá derivácia polynómov:

${}^{0}p'(x_0)=q_0,\quad {}^{k-1}p'(x_k)=q_k$ **clamped (fixovaný,zviazaný,ukotvený) splajn**

2.druhá derivácia polynómov v krajných uzloch je rovná 0:

${}^{0}p''(x_0)=0,\quad {}^{k-1}p''(x_k)=0$ **prirodzený(natural, relaxed) splajn**

3.rovnosť 1. a 2. derivácie polynómov v krajných uzloch:

${}^{0}p'(x_0)={}^{k-1}p'(x_k),\ {}^{0}p''(x_0)={}^{k-1}p''(x_k)$ **cyklický splajn**

4.opačná rovnosť 1. a 2. derivácie polynómov v krajných uzloch:

${}^{0}p'(x_0)=-{}^{k-1}p'(x_k),\ {}^{0}p''(x_0)=-{}^{k-1}p''(x_k)$ **acyklický splajn**

5.rovnosť 2.derivácií polynómov v prvých dvoch a posledných dvoch uzloch:

${}^{0}p''(x_0)={}^{1}p''(x_1),\ {}^{k-2}p''(x_{k-1})={}^{k-1}p''(x_k)$ **kvadratická podmienka**

6. rovnosť 3.derivácie polynómov v druhom a predposlednom uzle:

${}^{0}p'''(x_1)={}^{1}p'''(x_1),\ {}^{k-2}p'''(x_{k-1})={}^{k-1}p'''(x_{k-1})$ **podmienka 3.derivácie**