

PLOCHY URČENÉ OKRAJOM - COONS PATCHES

Autori: **Coons** - Ford, Detroit,

Gordon - General Motors, Chicago;

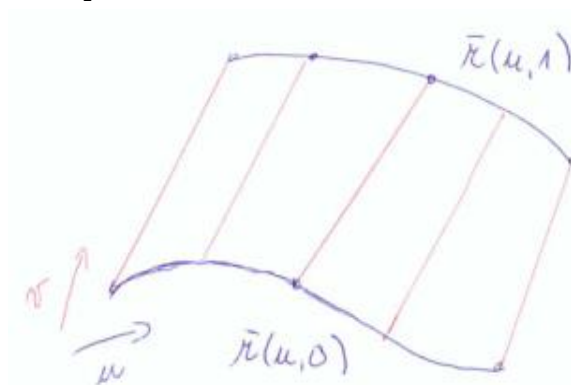
Vychádza sa zo siete kriviek, ktorá je vyplnená plochou. Dochádza k spojeniu resp. prechodu medzi krivkami (profilmi) pomocou plochy.

Priamkové (pravítkové, ruled, lofted) plochy.

Dané: • dve priestorové čiary C_1, C_2 toho istého parametra u , t.j. $C_1(u), C_2(u)$, definované na tom istom intervale $\langle 0,1 \rangle$.

- vyšetrujeme plochu, ktorá má dané krivky C_1, C_2 za protilahlé okrajové krivky:

$$C_1(u) = \mathbf{r}(u, 0), C_2(u) = \mathbf{r}(u, 1).$$



Predpokladáme, že poznáme parametrické vyjadrenie daných čiar. Vyšetrovaná plocha má „spojiť“ body daných okrajových kriviek. Tento problém má nekonečne veľa riešení.

Jedno riešenie je:

- spojiť body kriviek $C_1(u), C_2(u)$ pre tú istú hodnotu parametra u úsečkou:

$$\mathbf{r}_c(u, v) = \mathbf{r}(u, 0) + v(\mathbf{r}(u, 1) - \mathbf{r}(u, 0)) \quad v \in \langle 0, 1 \rangle$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{r}_c(u, v) = [\mathbf{r}(u, 0) \quad \mathbf{r}(u, 1)] \begin{bmatrix} 1-v \\ v \end{bmatrix}$$

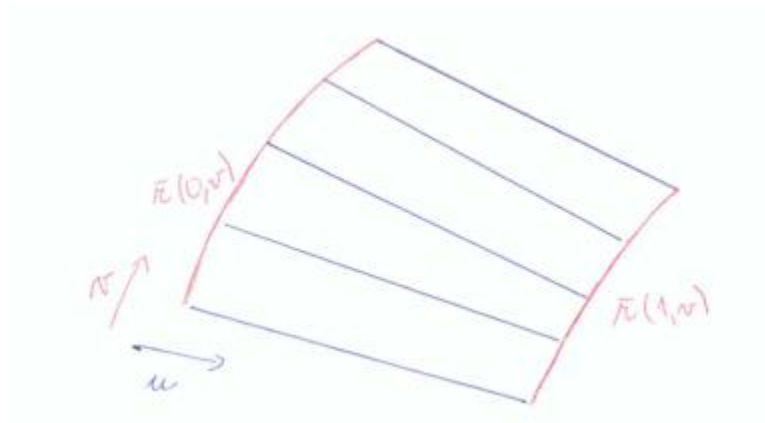
Priamkové plochy pripomínajú lineárnu interpoláciu veď každá izoparametrická v -čiara je úsečka. Je potrebné si uvedomiť, že neinterpolujeme body, ale celé krivky. Na krivky $C_1(u) = \mathbf{r}(u, 0), C_2(u) = \mathbf{r}(u, 1)$ okrem toho, že sú definované na tom istom intervale $\langle 0, 1 \rangle$ sa nekladú žiadne podmienky.

Ak potrebujeme pracovať s iným intervalom ako $\langle 0, 1 \rangle$ napr. $\langle a, b \rangle$, vtedy je potrebné

použiť lineárnu interpoláciu: $\mathbf{r}(u, v) = \frac{b-v}{b-a} \mathbf{r}(u, a) + \frac{v-a}{b-a} \mathbf{r}(u, b)$.

Dané: • dve priestorové krivky, označme ich D_1, D_2 , zvolíme za v -čiary :

$$D_1(v) = \mathbf{r}(0, v), D_2(v) = \mathbf{r}(1, v)$$



• spojiť body kriviek $D_1(v), D_2(v)$ pre tú istú hodnotu parametra v úsečkou:

$$\mathbf{r}_D(u, v) = \mathbf{r}(0, v) + u(\mathbf{r}(1, v) - \mathbf{r}(0, v)) \quad u \in \langle 0, 1 \rangle$$

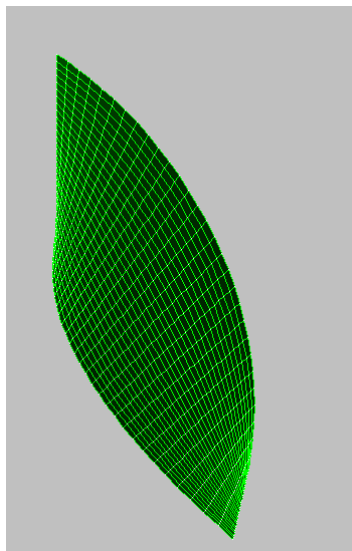
$$\Leftrightarrow \mathbf{r}_D(u, v) = \begin{bmatrix} 1-u & u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{r}(0, v) \\ \mathbf{r}(1, v) \end{bmatrix}$$

Príklady:

1. Dané sú okrajové u -čiary: $u \in \langle 0,1 \rangle$

$$\mathbf{r}(u, 0) = (u, \sin(\frac{\pi}{2}u), \cos(\frac{\pi}{2}u))$$

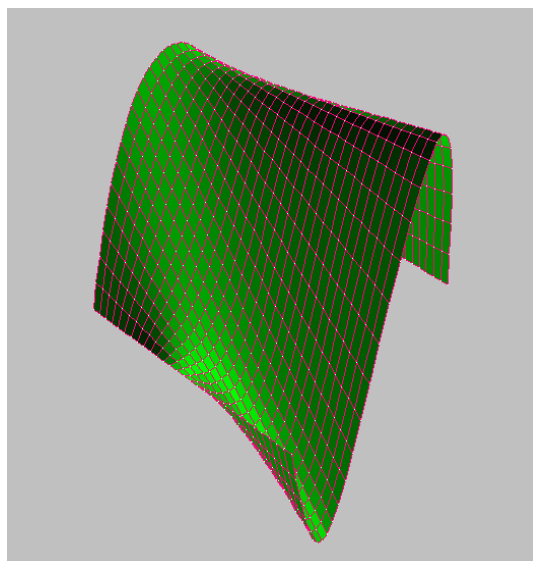
$$\mathbf{r}(u, 1) = (u, u^2, -\frac{u}{2})$$



2. Dané sú okrajové u -čiary: $u \in \langle 0,1 \rangle$

$$\mathbf{r}(u, 0) = (u, 0, 4u(1-u))$$

$$\mathbf{r}(u, 1) = (u, 1, \sin(2\pi u))$$



Konoidné plochy, konoidy RULED SURFACES

Syntetický prístup

Daná je čiara $\kappa = a$, priamka $p = b$ a rovina $c = \omega$. Priamky, ktoré pretínajú čiara a , priamku b a sú rovnobežné s rovinou ω vytvoria **konoidnú plochu-konoid**.

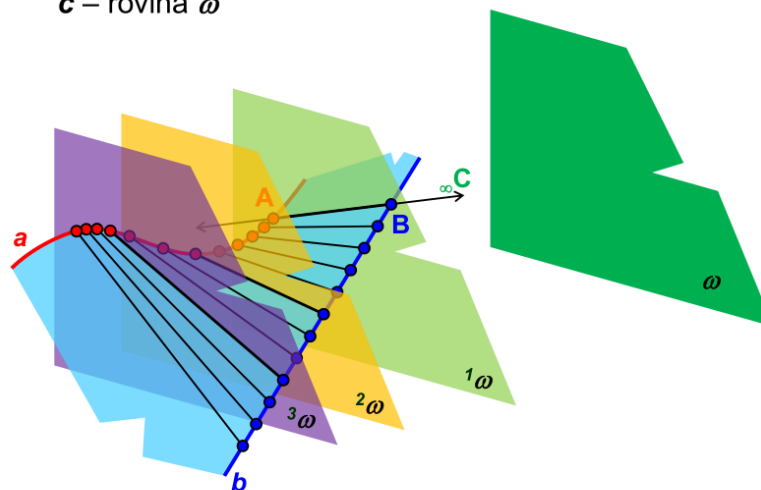
Čiara $^1\kappa = a$, priamka $p = b$, rovina ω - **riadiace útvary**.

Riadiace prvky:

a – krivka

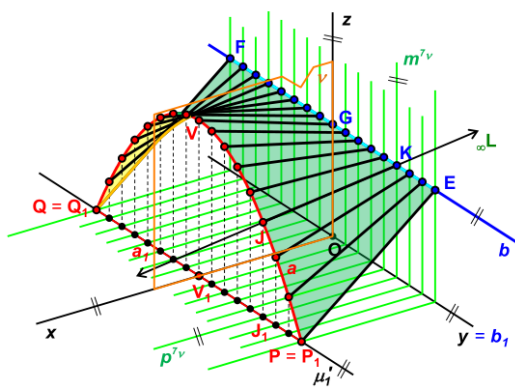
b – priamka

c – rovina ω

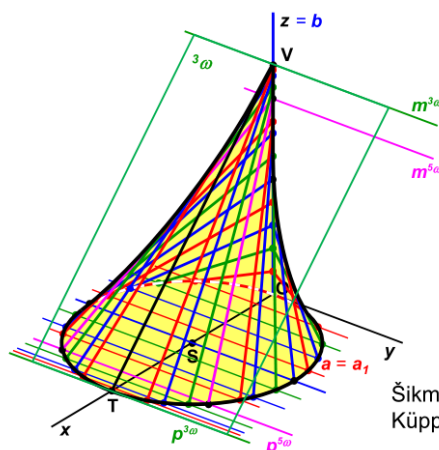


Podľa vzájomnej polohy riadiacej priamky a riadiacej roviny rozdeľujeme konoidy:

- kolmý
- šikmý



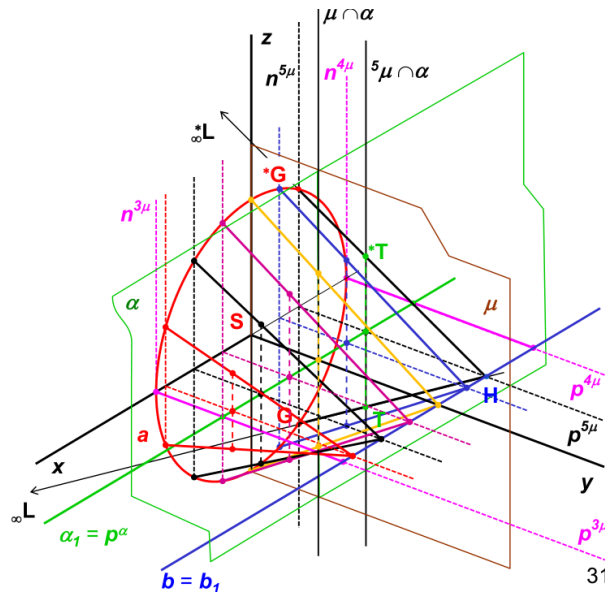
Kolmý parabolický konoid (príklad P3)



Šikmý kružnicový konoid –
Küpperov konoid (príklad P6)

Analytický prístup pre kolmý konoid

Nech $Oxyz$ je pravouhlý trojhran v priestore E^3 .



- Riadiaca čiara $\kappa = a$ je u -krivka, ktorá leží v rovine xz , s parametrickým vyjadrením:
 $x = x(u), y = 0, z = z(u), u \in U,$
- riadiaca rovina ω je rovina yz
- riadiaca priamka $p = b$ leží v rovine xy , resp. s ňou rovnobežnou.

Parametrické rovnice kolmého konoidu :

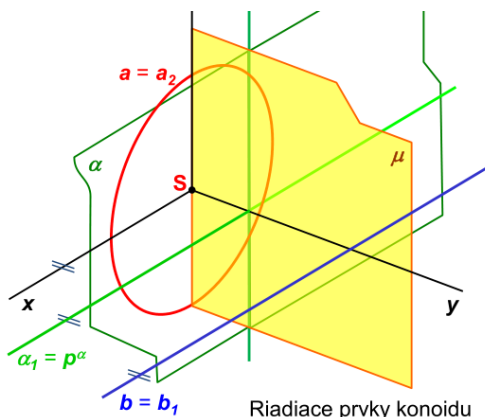
$$\begin{aligned} x(u, v) &= x(u) \\ y(u, v) &= y^P(1 - v) \\ z(u, v) &= (z^P + v(z(u) - z^P)), u \in U, v \in \langle 0, 1 \rangle \end{aligned}$$

Typy kolmých konoidov:

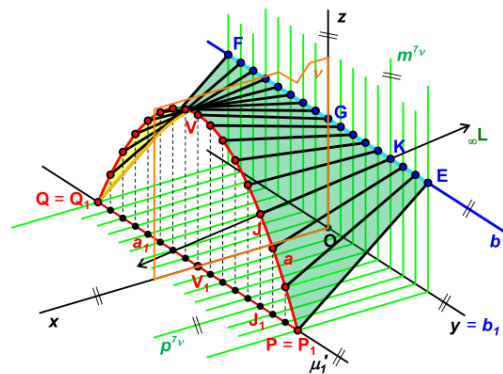
Čiara $\kappa = a$ je kružnica je **konoid kružnicový**.

Čiara $\kappa = a$ je elipsa je **konoid eliptický**.

Čiara $\kappa = a$ je parabola je **konoid parabolický**.



Riadiace prvky konoidu v kolmej axonometrii



Kolmý parabolický konoid (příklad P3)

Vizualizácia konoidných plôch

Kolmý kružnicový konoid



Prístavba domu kultúry
Ostrava, Česká republika, 2002

<http://www.q-pars.cz/cs/reference/p%C5%99%C3%ADstavba-domu-kultury-ostrava-jih>

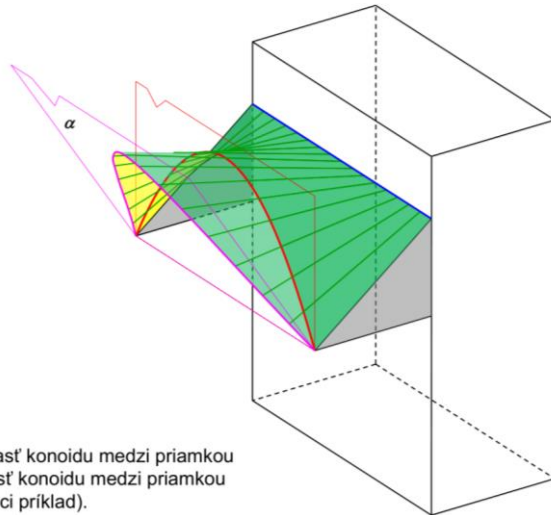
Kolmý parabolický konoid



Kostol sv. Cyrila a Metoda
Ostrava, Česká republika, 1998

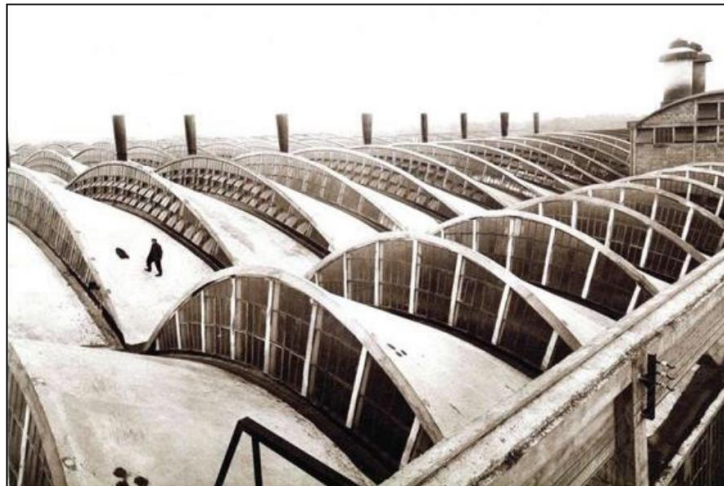
Poznámka: Markíza nad vstupom do kostola má pravdepodobne tvar kolmého parabolického konoidu. Na zastrešenie je použitá časť konoidu, ktorá neobsahuje ríadiacu priamku.

V stavebnej praxi môžeme použiť konoid na zastrešenie vchodu do budovy.



Na zastrešenie je vhodná časť konoidu medzi priamkou a parabolou, prípadne aj časť konoidu medzi priamkou a rovinou α (pozri nasledujúci príklad).

Kolmé parabolické konoidy



Eugène Freyssinet
Radiator factory
Dammarie-les-Lys, Francúzsko, 1926-28

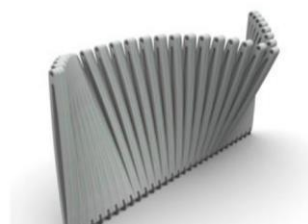
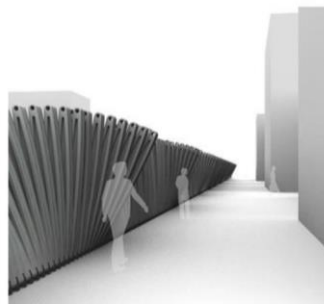
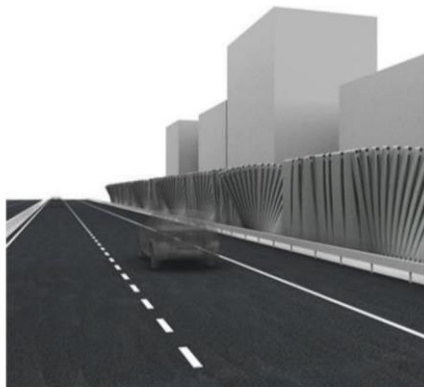
Kolmé kružnicové konoidy



Mario Botta
Synagóga Cymbalista
Tel Aviv, Izrael, 1998

Poznámka: Každá veža je tvorená štyrmi zhodnými konoidmi. Základňa veže je štvorec, ktorý plochy konoidov spájajú s kružnicou.

<http://desmena.com/2009/11/cymbalista-synagogue-by-mario-botta/>



Autor dizajnu: Rita Botelho
Sound barrier system

<http://www.ritabotelho.com/>



Santiago Calatrava nepoužíva vo svojej tvorbe priamky len v statickej polohe, ale v rôznych polohách. Na ľavom obrázku sú priamky časťou konoidy, na pravom obrázku priamky ležia v jednej rovine.

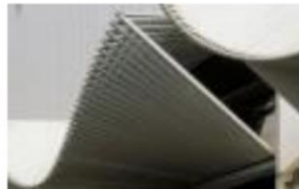
Santiago Calatrava
The Nations Wall
OH 2004 Atény, Grécko

JODIDIO, P. *Santiago Calatrava Complete Works 1979-2009*



Santiago Calatrava
Sklad firmy Ernsting's

Rôzne konoidy v jednotlivých fázach otvárania a zatvárania brán



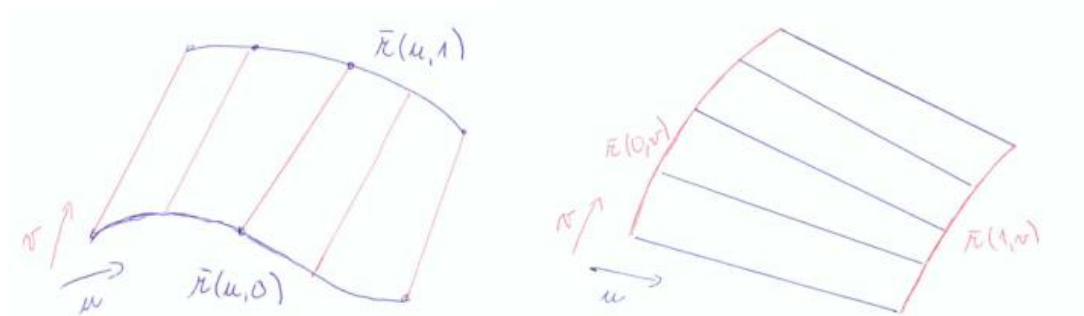
JODIDIO, P. *Santiago Calatrava Complete Works 1979-2009*

Bilineárne Coonsove záplaty. (Bilineárne stmeľované Coonsove záplaty)

- Dané: • štyri priestorové čiary $C_1(u), C_2(u), u \in \langle 0,1 \rangle$ a $D_1(v), D_2(v), v \in \langle 0,1 \rangle$ so spoločnými rohovými bodmi (splňajú podmienku uzavretého okraja t. j. $C_1(0) = D_1(0), C_1(1) = D_2(0), C_2(0) = D_1(1), C_2(1) = D_2(1)$)
- vyšetrujeme plochu, ktorá má dané krivky C_1, C_2, D_1, D_2 za protíľahlé okrajové krivky:

$$C_1(u) = \mathbf{r}(u, 0), C_2(u) = \mathbf{r}(u, 1)$$

$$D_1(v) = \mathbf{r}(0, v), D_2(v) = \mathbf{r}(1, v).$$



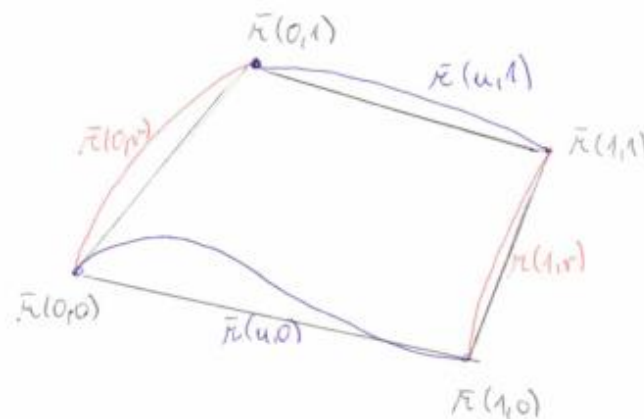
Vyšetrovaná plocha má „spojiť“ body daných okrajových kriviek. Pri riešení využijeme dve priamkové plochy:

$\mathbf{r}_C(u, v) = \begin{bmatrix} \mathbf{r}(u, 0) & \mathbf{r}(u, 1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-v \\ v \end{bmatrix}$, $u, v \in \langle 0,1 \rangle \times \langle 0,1 \rangle$, ktorá interpoluje C -krivky a plochu

$\mathbf{r}_D(u, v) = \begin{bmatrix} 1-u & u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{r}(0, v) \\ \mathbf{r}(1, v) \end{bmatrix}$, $u, v \in \langle 0,1 \rangle \times \langle 0,1 \rangle$, ktorá interpoluje D -krivky.

Ani jedna z plôch $\mathbf{r}_C(u, v)$, $\mathbf{r}_D(u, v)$ neinterpoluje všetky štyri dané krivky. Túto vlastnosť nemá ani plocha $\mathbf{r}_C(u, v) + \mathbf{r}_D(u, v)$, ale má ju plocha

$$\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{r}_C(u, v) + \mathbf{r}_D(u, v) - \mathbf{r}_{CD}(u, v), \quad u, v \in \langle 0,1 \rangle \times \langle 0,1 \rangle$$



kde $\mathbf{r}_{CD}(u, v)$ je bilineárny interpolant rohových bodov.

Zapíšeme vyjadrenie plochy:

$$\mathbf{r}(u, v) = [\mathbf{r}(u, 0) \quad \mathbf{r}(u, 1)] \begin{bmatrix} 1-v \\ v \end{bmatrix} + [1-u \quad u] \begin{bmatrix} \mathbf{r}(0, v) \\ \mathbf{r}(1, v) \end{bmatrix} - [1-u \quad u] \begin{bmatrix} \mathbf{r}(0, 0) & \mathbf{r}(0, 1) \\ \mathbf{r}(1, 0) & \mathbf{r}(1, 1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-v \\ v \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow [1-u \quad -1 \quad u] \begin{bmatrix} \mathbf{r}(0, 0) & \mathbf{r}(0, v) & \mathbf{r}(0, 1) \\ \mathbf{r}(u, 0) & \mathbf{r}(u, v) & \mathbf{r}(u, 1) \\ \mathbf{r}(1, 0) & \mathbf{r}(1, v) & \mathbf{r}(1, 1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-v \\ -1 \\ v \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

Táto plocha nie je bilineárna (nie je tu súčin lineárnych funkcií), názov súvisí s konštrukciou plochy. Funkcie $1-u$, u , $1-v$, v sú zmiešavacie funkcie.

Príklady:

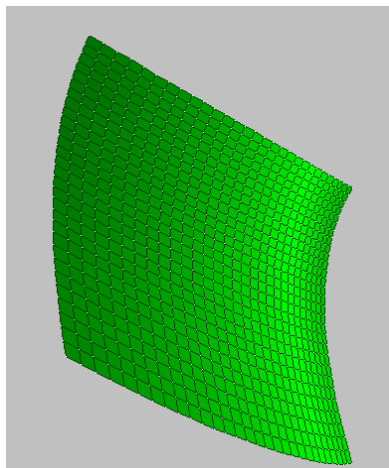
1. Dané sú okrajové u -, v - čiary: $u, v \in \langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle$

$$\mathbf{r}(u, 0) = (u, u^2, 1-u)$$

$$\mathbf{r}(u, 1) = (u+1, u^2-1, 2-u)$$

$$\mathbf{r}(0, v) = (v, -v^2, v+1)$$

$$\mathbf{r}(1, v) = (1+v, 1-v^2, v)$$



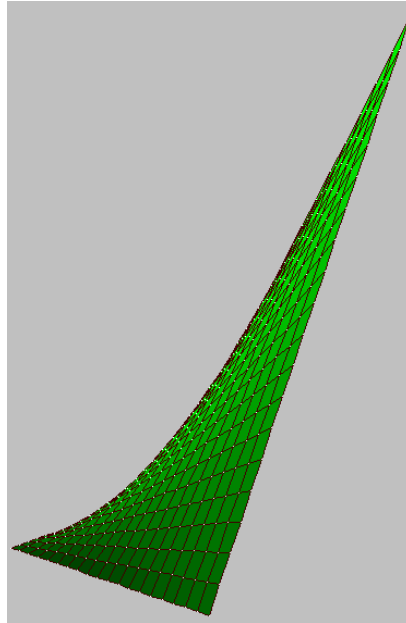
2. Dané sú okrajové u -, v - čiary: $u, v \in \langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle$

$$\mathbf{r}(u, 0) = (u, 0, 0)$$

$$\mathbf{r}(u, 1) = (u, 1, 2u)$$

$$\mathbf{r}(0, v) = (0, v, 0)$$

$$\mathbf{r}(1, v) = (1, v, 2v)$$



Čiastkovo bikubické Coonsove záplaty. (Čiastkovo bikubicky stmeľované Coonsove záplaty)

Na konštrukciu bilineárnych Coonsových záplat sme použili funkcie $1-u$, u , $1-v$, v . Derivácie týchto funkcií sú konštanty, čo spôsobuje problémy pri spájaní dvoch Coonsových záplat pozdĺž hraničných kriviek. Preto na konštrukciu Coonsových záplat možno použiť aj iné zmiešavacie funkcie $f_1(u)$, $f_2(u)$, $g_1(v)$, $g_2(v)$, ktoré však musia spĺňať podmienky :

$$\begin{aligned} f_1(u) + f_2(u) &= 1 \\ g_1(v) + g_2(v) &= 1 \\ f_1(0) = g_1(0) &= 1 \\ f_1(1) = g_1(1) &= 0 \end{aligned} \tag{I}$$

Zmiešavacie funkcie $f_1(u)$, $f_2(u)$, $g_1(v)$, $g_2(v)$ majú vplyv na tvar Coonsovej záplaty.

Niektoré návrhové systémy umožňujú meniť zmiešavacie funkcie a tak získať širokú triedu Coonsových záplat.

Požiadavkám (I) vyhovujú dva Hermitove polynómy : $H_{03}(t) = 1 - 3t^2 + 2t^3$, $H_{33}(t) = 3t^2 - 2t^3$, ktoré postavíme do úlohy zmiešavacích funkcií $f_1(u)$, $f_2(u)$, $g_1(v)$, $g_2(v)$:

$$\begin{aligned} f_1(u) &= H_{03}(u) = 1 - 3u^2 + 2u^3 \\ f_2(u) &= H_{33}(u) = 3u^2 - 2u^3 \\ g_1(v) &= H_{03}(v) = 1 - 3v^2 + 2v^3 \\ g_2(v) &= H_{33}(v) = 3v^2 - 2v^3 \end{aligned}$$

Zápis čiastkovej bikubickej Coonsovej záplaty:

$$\mathbf{r}(u, v) = \begin{bmatrix} \mathbf{r}(u, 0) & \mathbf{r}(u, 1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_{03}(v) \\ H_{33}(v) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H_{03}(u) & H_{33}(u) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{r}(0, v) \\ \mathbf{r}(1, v) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} H_{03}(u) & H_{33}(u) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{r}(0, 0) & \mathbf{r}(0, 1) \\ \mathbf{r}(1, 0) & \mathbf{r}(1, 1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_{03}(v) \\ H_{33}(v) \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} H_{03}(u) & -1 & H_{33}(u) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{r}(0, 0) & \mathbf{r}(0, v) & \mathbf{r}(0, 1) \\ \mathbf{r}(u, 0) & \mathbf{r}(u, v) & \mathbf{r}(u, 1) \\ \mathbf{r}(1, 0) & \mathbf{r}(1, v) & \mathbf{r}(1, 1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_{03}(v) \\ -1 \\ H_{33}(v) \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

Príklady:

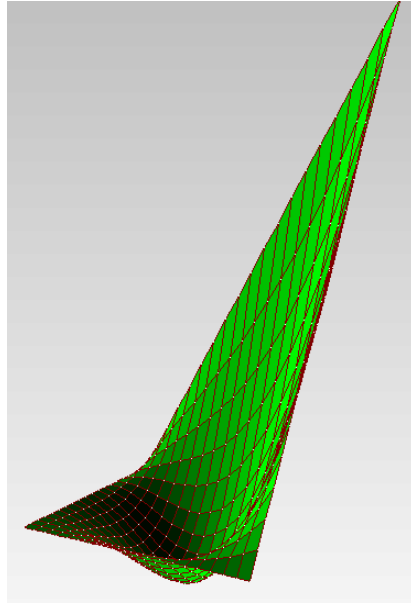
1. Dané sú okrajové u - , v - čiary: $u, v \in \langle 0,1 \rangle \times \langle 0,1 \rangle$

$$\mathbf{r}(u, 0) = (u, 0, 0)$$

$$\mathbf{r}(u, 1) = (u, 1, 2u)$$

$$\mathbf{r}(0, v) = (0, v, 0)$$

$$\mathbf{r}(1, v) = (1, v, 2v)$$



Bikubické Coonsove záplaty

(Bikubicky stmelené Coonsove záplaty)

Bikubická Hermitova interpolačná záplata

Konštrukcia hladkých zložených záplat si vyžaduje, aby záplaty neboli konštruované len z hraničných kriviek, ale aj z vektorových funkcií, ktoré reprezentujú derivácie v smeroch priechných k týmto hraniciam (podobne ako je to u Hermitovej kubiky, kde sú dané nielen krajné body, ale aj derivácie v nich).

Pri vytváraní záplaty budeme uvažovať, že každá okrajová krivka je Hermitova kubika:

$$\mathbf{r}(t) = [H_{03}(t) \quad H_{33}(t) \quad H_{13}(t) \quad H_{23}(t)] \begin{bmatrix} \mathbf{R}_0 \\ \mathbf{R}_1 \\ \mathbf{r}'_0 \\ \mathbf{r}'_1 \end{bmatrix} t \in \langle 0,1 \rangle.$$

Bikubickú Coonsovu záplatu definujeme :

$$\mathbf{r}(u, v) = [H_{03}(u) \quad H_{33}(u) \quad H_{13}(u) \quad H_{23}(u)] \begin{bmatrix} \mathbf{r}(0,0) & \mathbf{r}(0,1) & \mathbf{r}_v(0,0) & \mathbf{r}_v(0,1) \\ \mathbf{r}(1,0) & \mathbf{r}(1,1) & \mathbf{r}_v(1,0) & \mathbf{r}_v(1,1) \\ \mathbf{r}_u(0,0) & \mathbf{r}_u(0,1) & \mathbf{r}_{uv}(0,0) & \mathbf{r}_{uv}(0,1) \\ \mathbf{r}_u(1,0) & \mathbf{r}_u(1,1) & \mathbf{r}_{uv}(1,0) & \mathbf{r}_{uv}(1,1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_{03}(v) \\ H_{33}(v) \\ H_{13}(v) \\ H_{23}(v) \end{bmatrix}$$

G

resp.

$$\mathbf{r}(u, v) = [H_{03}(u) \quad H_{13}(u) \quad H_{23}(u) \quad H_{33}(u)] \begin{bmatrix} \mathbf{r}(0,0) & \mathbf{r}_v(0,0) & \mathbf{r}_v(0,1) & \mathbf{r}(0,1) \\ \mathbf{r}_u(0,0) & \mathbf{r}_{uv}(0,0) & \mathbf{r}_{vu}(0,1) & \mathbf{r}_u(0,1) \\ \mathbf{r}_u(1,0) & \mathbf{r}_{uv}(1,0) & \mathbf{r}_{uv}(1,1) & \mathbf{r}_u(1,1) \\ \mathbf{r}(1,0) & \mathbf{r}_v(1,0) & \mathbf{r}_v(1,1) & \mathbf{r}(1,1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_{03}(v) \\ H_{13}(v) \\ H_{23}(v) \\ H_{33}(v) \end{bmatrix}$$

G - matica mapy záplaty má 16 vektorov, možno ju rozdeliť na 4 submatice- sekcie:

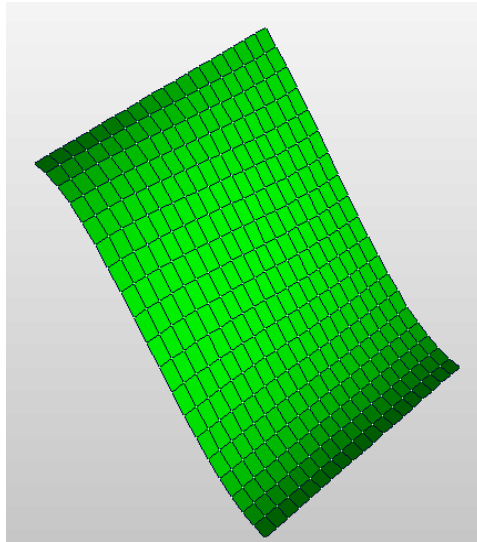
- sekcia rohových bodov
- sekcia vektorov dotyčníc v smere v v rohových bodoch záplaty
- sekcia vektorov dotyčníc v smere u v rohových bodoch záplaty
- sekcia vektorov twistov v rohových bodoch záplaty

V prípade, že sekcia vektorov twistov je nulová, hovoríme o 12-vektorovej Coonsovej záplate, resp. Fergusonovej záplate. Ak aspoň jeden vektor twistu je nenulový, tak rovnica opisuje 16-vektorovú Coonsovu záplatu resp. bikubickú Coonsovu záplatu resp. Hermitovu bikubickú interpolačnú záplatu. Všimnime si, že vstupnými dátami sú rôzne vektory v rohových bodoch a nie okrajové čiary ako pri predchádzajúcich Coonsovych plochách.

Príklad:

1. Dané sú:

- štyri rohové body: $\mathbf{r}(0,0) = (0,0,1)$, $\mathbf{r}(1,0) = (1,0,1)$, $\mathbf{r}(0,1) = (0,1,0)$, $\mathbf{r}(1,1) = (1,1,0)$
- vektory derivácií v smere u v rohových bodoch:
 $\mathbf{r}_u(0,0) = (1,0,0)$, $\mathbf{r}_u(1,0) = (1,0,0)$, $\mathbf{r}_u(0,1) = (1,0,0)$, $\mathbf{r}_u(1,1) = (1,0,0)$
- vektory derivácií v smere v v rohových bodoch:
 $\mathbf{r}_v(0,0) = (0,1,-1)$, $\mathbf{r}_v(1,0) = (0,1,0)$, $\mathbf{r}_v(0,1) = (0,1,0)$, $\mathbf{r}_v(1,1) = (0,1,0)$
- vektory twistov v rohových bodoch: Fergusonova záplata.



Geometrický význam vektora twistu $\left. \frac{\partial^2 \mathbf{r}(u,v)}{\partial u \partial v} \right|$.

Fergusonova plocha, ktorej okraj tvoria strany jednotkového štvorca v rovine xy ,

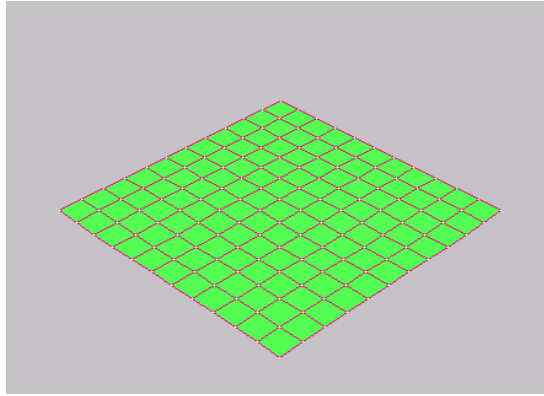
vektory derivácií v smere u v rohových bodoch:

$$\mathbf{r}_u(0,0) = (1,0,0), \mathbf{r}_u(1,0) = (1,0,0), \mathbf{r}_u(0,1) = (1,0,0), \mathbf{r}_u(1,1) = (1,0,0)$$

vektory derivácií v smere v v rohových bodoch:

$$\mathbf{r}_v(0,0) = (0,1,0), \mathbf{r}_v(1,0) = (0,1,0), \mathbf{r}_v(0,1) = (0,1,0), \mathbf{r}_v(1,1) = (0,1,0)$$

má parametrické vyjadrenie: $x(u,v) = u$, $y(u,v) = v$, $z(u,v) = 0$, $u, v \in \langle 0,1 \rangle \times \langle 0,1 \rangle$.



Teda je to štvorec a jeho vnútro, izoparametrické čiary oboch sústav sú úsečky.

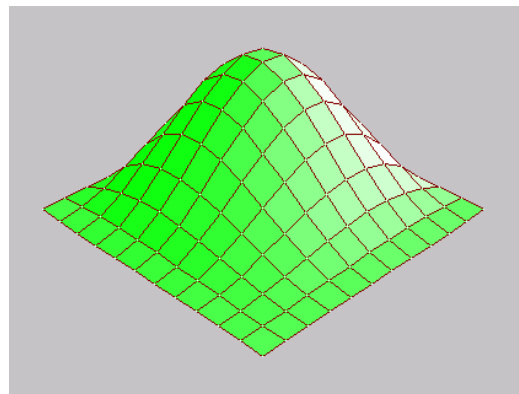
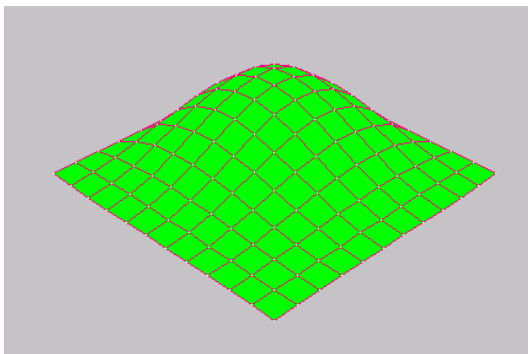
Nech vstupné dáta sú rovnaké (rohové body, 1.derivácie), ale sekcia twistov má vektory $\mathbf{r}_{uv}(0,0) = (0,0,T), T \neq 0, \mathbf{r}_{uv}(1,0) = \mathbf{r}_{uv}(0,1) = \mathbf{r}_{uv}(1,1) = (0,0,0)$.

Parametrické vyjadrenie 16-vektorovej Coonsovej záplaty:

$$x(u, v) = u$$

$$y(u, v) = v$$

$$z(u, v) = T \cdot H_{13}(u) \cdot H_{13}(v) = T \cdot (u - 2u^2 + u^3)(v - 2v^2 + v^3), u, v \in \langle 0,1 \rangle \times \langle 0,1 \rangle.$$



Pre rôzne hodnoty T (obr. $T = 10, 20$) získame rôzne Coonsove plochy. Nenulový vektor twistu v rohovom bode vyvolá „vyklonenie“ plochy v okolí rohového bodu. Izoparametrické čiary oboch sústav sú kubické krivky. Existujú rôzne metódy, ktorými sa určujú vektory twistov (napr. Bessel, Adini).