2.3. APROXIMAČNÉ SPLAJNY

2.3.1. ČIASTKOVÝ BEZIEROV SPLAJN

1.Zložené Bezierove kubiky

Opis krivky zložitého tvaru (s veľkým počtom riadiacich bodov) si vyžaduje Bezierovu krivku vysokého stupňa, čo je nevýhodné najmä z numerických dôvodov a navyše často jednoduchý Bezierov oblúk nespĺňa požiadavky "dobrej" aproximácie riadiaceho polygónu. Riešením môžu byť zložené Bezierove krivky, ktoré sú vytvorené zo segmentov jednoduchých Bezierovych oblúkov, v našom prípade Bezierovych kubík, pri splnení podmienok ich hladkého spojenia – "zošitia".

Nech ${}^{0}S$ je segment Bezierovej krivky 3° s riadiacimi bodmi ${}^{0}\mathbf{V}_0, {}^{0}\mathbf{V}_1, {}^{0}\mathbf{V}_2, {}^{0}\mathbf{V}_3$:

$${}^{0}S:\ {}^{0}\mathbf{b}(t) = \sum_{i=0}^{3} B_{i,3}(t)\,{}^{0}\mathbf{V}_i \quad t \in \langle 0,1 \rangle .$$

Úlohou je na túto krivku ${}^{0}S$ hladko napojiť inú Bezierovu krivku 3°:

$${}^{1}S:\ {}^{1}\mathbf{b}(t) = \sum_{i=0}^{3} B_{i,3}(t)\,{}^{1}\mathbf{V}_i \quad t \in \langle 0,1 \rangle$$

ktorej riadiace body budú ${}^{1}\mathbf{V}_0, {}^{1}\mathbf{V}_1, {}^{1}\mathbf{V}_2, {}^{1}\mathbf{V}_3$. Tieto riadiace body ${}^{1}\mathbf{V}_0, {}^{1}\mathbf{V}_1, {}^{1}\mathbf{V}_2, {}^{1}\mathbf{V}_3$ vyčíslime a to na základe podmienok **geometrickej spojitosti**:

(1°) geometrická spojitosť 0. rádu **G^0-spojitosť** (polohová spojitosť):

$${}^{1}\mathbf{b}(0) = {}^{0}\mathbf{b}(1) \iff {}^{1}\mathbf{V}_0 = {}^{0}\mathbf{V}_3$$

(2°) geometrická spojitosť 1.rádu **G^1-spojitosť** (dotyčnicová spojitosť):

$${}^{1}\mathbf{b}'(0) = \beta 1\,{}^{0}\mathbf{b}'(1), \beta 1 > 0 \iff {}^{1}\mathbf{V}_1 = {}^{0}\mathbf{V}_3 + \beta 1({}^{0}\mathbf{V}_3 - {}^{0}\mathbf{V}_2)$$

Bod ${}^{1}\mathbf{V}_1$ je bodom priamky ${}^{0}\mathbf{V}_2{}^{0}\mathbf{V}_3$.

(3°) geometrická spojitosť 2.rádu **G^2-spojitosť** (krivosťová spojitosť):

$${}^{1}\mathbf{b}''(0) = \beta 1^2\,{}^{0}\mathbf{b}''(1) + \beta 2\,{}^{0}\mathbf{b}'(1) \iff$$

$${}^{1}\mathbf{V}_2 = \beta 1^2\,{}^{0}\mathbf{V}_1 + \left(-2\beta 1 - 2\beta 1^2 - \frac{1}{2}\beta 2\right){}^{0}\mathbf{V}_2 + \left(1 + 2\beta 1 + \beta 1^2 + \frac{1}{2}\beta 2\right){}^{0}\mathbf{V}_3$$

Riadiaci bod ${}^{1}\mathbf{V}_2$ je určený pomocou bodov ${}^{0}\mathbf{V}_1, {}^{0}\mathbf{V}_2, {}^{0}\mathbf{V}_3$.

Teda pri zabezpečení geometrickej spojitosti 2.rádu zostáva nám voľba jedného riadiaceho bodu a to ${}^{1}\mathbf{V}_3$ pre napájaný Bezierov segment ${}^{1}\mathbf{b}(t)$.

Je pravda, že možnosť voľby parametrov $\beta 1$, $\beta 2$ ponúka modelovať krivku najmä v okolí napojenia dvoch segmentov. Pri praktických aplikáciách sa siaha k "tvrdšej" požiadavke a takou je **parametrická spojitosť** t.j. $\beta 1 = 1$, $\beta 2 = 0$.

(1°°) parametrická spojitosť 0. rádu **C^0-spojitosť** :

$${}^{1}\mathbf{b}(0) = {}^{0}\mathbf{b}(1) \iff {}^{1}\mathbf{V}_0 = {}^{0}\mathbf{V}_3$$

(2°°) parametrická spojitosť 1.rádu **C^1-spojitosť** :

${}^{1}\mathbf{b}'(0) = {}^{0}\mathbf{b}'(1) \Leftrightarrow {}^{1}\mathbf{V}_1 = {}^{0}\mathbf{V}_3 + ({}^{0}\mathbf{V}_3 - {}^{0}\mathbf{V}_2) \Leftrightarrow {}^{0}\mathbf{V}_3 = \frac{1}{2}({}^{1}\mathbf{V}_1 + {}^{0}\mathbf{V}_2)$

Bod ${}^{0}\mathbf{V}_3$ je stred úsečky ${}^{0}\mathbf{V}_2{}^{1}\mathbf{V}_1$.

(3°°) parametrická spojitosť 2.rádu $\mathbf{C}^2$**-spojitosť** :

${}^{1}\mathbf{b}''(0) = {}^{0}\mathbf{b}''(1) \Leftrightarrow {}^{1}\mathbf{V}_2 = {}^{0}\mathbf{V}_1 + 4({}^{0}\mathbf{V}_3 - {}^{0}\mathbf{V}_2)$

Riadiaci bod ${}^{1}\mathbf{V}_2$ leží na priamke prechádzajúcej bodom ${}^{0}\mathbf{V}_1$ a rovnobežnej s priamkou ${}^{0}\mathbf{V}_2{}^{0}\mathbf{V}_3$.

2. Reprezentácia čiastkového Bezierovho splajnu

Teraz keď poznáme postup vyčísľovania vrcholov riadiacich polygónov pre Bezierove krivky 3°, môžeme prejsť k splajnom, ktoré budú vytvorené zo segmentov Bezierovych kubík.

Splajnová krivka $S=S(u)$ je spojitý obraz systému intervalov definovaných postupnosťou $u_0 < u_1 < .. < u_L$ do priestoru $E(E^2, E^3)$ taký, že každý z intervalov $\langle u_i, u_{i+1} \rangle$, $i= 0,1,..,L-1$, sa zobrazí na Bezierovu krivku 3°.

Prvky postupnosti $\{u_i\}_{i=0}^{L}$ sú uzly a každej hodnote $u \in \langle u_0, u_L \rangle$ prislúcha bod $S(u)$ na splajne. Parameter u sa nazýva <u>globálny parameter</u>. Okrem globálneho parametra možno bod $S(u)$ opísať aj pomocou <u>lokálneho parametra</u> $t \in \langle 0,1 \rangle$ t.j. ku každému $u \in \langle u_i, u_{i+1} \rangle$ existuje $t \in \langle 0,1 \rangle$, ktorý získame $t = \dfrac{u-u_i}{u_{i+1}-u_i} = \dfrac{u-u_i}{\Delta_i}$.

Ak pracujeme s celým splajnom, tak je výhodnejšie používať globálny parameter $u \in \langle u_0, u_L \rangle$. Naopak, ak pracujeme len s niektorým jeho segmentom, tak je výhodnejšie pracovať s lokálnym parametrom. Budeme používať označenie $\mathbf{s}(u) = {}^{i}\mathbf{s}(t)$.

Lokálne súradnice sú výhodné pri deriváciách:

1. derivácia $\dfrac{d\mathbf{s}(u)}{du} = \dfrac{d\,{}^{i}\mathbf{s}(t)}{dt}\dfrac{dt}{du} = \dfrac{1}{\Delta_i}\dfrac{d\,{}^{i}\mathbf{s}(t)}{dt} = \dfrac{1}{\Delta_i}\,{}^{i}\mathbf{s}'(t)$

2. derivácia $\dfrac{d^2\mathbf{s}(u)}{du^2} = (\dfrac{1}{\Delta_i})^2\,{}^{i}\mathbf{s}''(t)$

Body $\mathbf{s}(u_{i+1}) = {}^{i}\mathbf{s}(1) = {}^{i+1}\mathbf{s}(0)$, $i= 0,..,L-2$, sa nazývajú <u>spojovacie body</u>, krátko <u>spoje</u> na Bezierovom splajne.

Súhrn Bezierovych riadiacich polygónov všetkých segmentov sa nazýva <u>čiastkový Bezierov polygón.</u>

Teraz bude úlohou určiť – vypočítať vrcholy riadiacich polygónov pre každý segment tak, aby v spojoch boli splnené požiadavky na spojitosť výslednej krivky – splajnu.
Nech sú dané dve Bezierove kubiky:

$${}^0S\colon\ {}^0\mathbf{b}(u) = {}^0\mathbf{b}\,(\mathbf{V}_0\,\mathbf{V}_1\,\mathbf{V}_2\,\mathbf{V}_3), \qquad u \in \langle u_0, u_1 \rangle$$

$${}^1S\colon\ {}^1\mathbf{b}(u) = {}^1\mathbf{b}\,(\mathbf{V}_3\,\mathbf{V}_4\,\mathbf{V}_5\,\mathbf{V}_6), \qquad u \in \langle u_1, u_2 \rangle,\ \ u_0 < u_1 < u_2$$

C^0 –spojitosť:

krivka $\mathbf{s}(u) = {}^0S \cup {}^1S$, $u \in \langle u_0, u_2 \rangle$, je v bode $u = u_1$ C^0-spojitá $\Leftrightarrow$

$${}^0\mathbf{s}(u)\big|_{u=u_1} = {}^1\mathbf{s}(u)\big|_{u=u_1} \Leftrightarrow {}^0\mathbf{s}(t)\big|_{t=1} = {}^1\mathbf{s}(t)\big|_{t=0} \Leftrightarrow \mathbf{V}_3 = \mathbf{V}_3$$

C^1 –spojitosť:

krivka $\mathbf{s}(u) = {}^0S \cup {}^1S$, $u \in \langle u_0, u_2 \rangle$, je v bode $u = u_1$ C^1-spojitá $\Leftrightarrow$

$$\frac{d\,{}^0\mathbf{s}(u)}{du}\bigg|_{u=u_1} = \frac{d\,{}^1\mathbf{s}(u)}{du}\bigg|_{u=u_1} \Leftrightarrow \frac{1}{\Delta_0}\,{}^0\mathbf{s}'(t)\big|_{t=1} = \frac{1}{\Delta_1}\,{}^1\mathbf{s}'(t)\big|_{t=0} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{\Delta_0}3(\mathbf{V}_3 - \mathbf{V}_2) = \frac{1}{\Delta_1}3(\mathbf{V}_4 - \mathbf{V}_3) \Leftrightarrow \mathbf{V}_3 = \frac{\Delta_1}{\Delta_0 + \Delta_1}\mathbf{V}_2 + \frac{\Delta_0}{\Delta_0 + \Delta_1}\mathbf{V}_4 .$$

Túto vlastnosť môžeme interpretovať geometricky : riadiace body $\mathbf{V}_2\ \mathbf{V}_3\ \mathbf{V}_4$ musia byť kolineárne a musí platiť deliaci pomer: *ratio*($\mathbf{V}_2\ \mathbf{V}_3\ \mathbf{V}_4$)$=\frac{\Delta_0}{\Delta_1}$. (Ak $\Delta_0 = \Delta_1 = 1$, tak bod $\mathbf{V}_3$ je stred úsečky $\mathbf{V}_2\mathbf{V}_4$).

C^2 -spojitosť:

krivka $\mathbf{s}(u) = {}^0S \cup {}^1S$, $u \in \langle u_0, u_2 \rangle$, je v bode $u = u_1$ C^2-spojitá (C^1 +spojitosť 2.derivácie)
spojitosť 2.derivácie

$$\frac{d^{2\,0}\mathbf{s}(u)}{du^2}\bigg|_{u=u_1} = \frac{d^{2\,1}\mathbf{s}(u)}{du^2}\bigg|_{u=u_1} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{\Delta_0}\right)^{2\,0}\mathbf{s}''(t)\big|_{t=1} = \left(\frac{1}{\Delta_1}\right)^{2\,1}\mathbf{s}''(t)\big|_{t=0}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\frac{1}{\Delta_0}\right)^2 3.2(\mathbf{V}_3 - 2\mathbf{V}_2 + \mathbf{V}_1) = \left(\frac{1}{\Delta_1}\right)^2 3.2(\mathbf{V}_3 - 2\mathbf{V}_4 + \mathbf{V}_5)$$

Po algebrických úpravách dostaneme:

$$-\frac{\Delta_1}{\Delta_0}\mathbf{V}_1 + \frac{\Delta_0 + \Delta_1}{\Delta_0}\mathbf{V}_2 = \frac{\Delta_0 + \Delta_1}{\Delta_1}\mathbf{V}_4 - \frac{\Delta_0}{\Delta_1}\mathbf{V}_5 \qquad \text{(X)}$$

Každá strana vyjadrenia (X) určuje bod. Pre ľavú stranu je to bod $\mathbf{D}_-$ a pravú stranu $\mathbf{D}_+$ t.j.:

$$\mathbf{D}_- = -\frac{\Delta_1}{\Delta_0}\mathbf{V}_1 + \frac{\Delta_0 + \Delta_1}{\Delta_0}\mathbf{V}_2 \quad \text{a} \quad \mathbf{D}_+ = \frac{\Delta_0 + \Delta_1}{\Delta_1}\mathbf{V}_4 - \frac{\Delta_0}{\Delta_1}\mathbf{V}_5 \qquad \text{(XX)}$$

Podmienka parametrickej spojitosti 2.rádu požaduje totožnosť bodov $\mathbf{D}_- = \mathbf{D}_+$, ktorý nazveme $\mathbf{D}$ a úpravou (XX) dostaneme

$$\mathbf{V}_2 = \frac{\Delta_1}{\Delta_0 + \Delta_1}\mathbf{V}_1 + \frac{\Delta_0}{\Delta_0 + \Delta_1}\mathbf{D} \text{ a } \mathbf{V}_4 = \frac{\Delta_1}{\Delta_0 + \Delta_1}\mathbf{D} + \frac{\Delta_0}{\Delta_0 + \Delta_1}\mathbf{V}_5 .$$

Navyše platia deliace pomery: $ratio(\mathbf{V}_1\ \mathbf{V}_2\ \mathbf{D}) = ratio(\mathbf{D}\mathbf{V}_4\ \mathbf{V}_5) = \frac{\Delta_0}{\Delta_1}$.

Teda krivka $\mathbf{s}(u) = {}^0S \cup {}^1S$ je v bode $u = u_1$ C^2-spojitá $\Leftrightarrow$ ak je

1. C^1-spojitá $\Leftrightarrow$ $\mathbf{V}_2\ \mathbf{V}_3\ \mathbf{V}_4$ sú kolineárne a $ratio(\mathbf{V}_2\ \mathbf{V}_3\ \mathbf{V}_4) = \frac{\Delta_0}{\Delta_1}$

2. existuje bod $\mathbf{D}$ tak, že platí: $ratio(\mathbf{V}_1\ \mathbf{V}_2\ \mathbf{D}) = ratio(\mathbf{D}\mathbf{V}_4\ \mathbf{V}_5) = \frac{\Delta_0}{\Delta_1}$.

3. **Vyčísľovacie algoritmy**

- Najskôr k zadanej postupnosti bodov určíme riadiace body pre Bezierove segmenty podľa požiadaviek na rád spojitosti, ktoré označíme $\mathbf{V}_0, \ldots, \mathbf{V}_n$.
- Následne každý segment Bezierovej kubiky určený štvoricou riadiacich bodov je vyčíslený Casteljau algoritmom (podrobnejšie spracované vo Farinovi).

2.3.2. BETA-SPLAJNOVÉ KRIVKY, G^2-SPLAJN

Autor: Brian **BARSKY**: Computer Graphics and Geometric Modeling Using Beta-splines (1988)

1. Reprezentácia Beta-splajnovej krivky

Nech je zadaná postupnosť riadiacich $\mathbf{V}_0, \ldots, \mathbf{V}_n$ bodov v priestore E (E^2, E^3).
β-splajnová krivka je po častiach polynomická krivka 3° vytvorená zo segmentov :

$$^{i}\mathbf{q}(\beta 1, \beta 2, t) = \sum_{j=0}^{3} Q_j(\beta 1, \beta 2, t)\mathbf{V}_{i+j}, \quad t \in \langle 0,1 \rangle,$$

kde zmiešavacie funkcie $Q_j(\beta 1, \beta 2, t), j = 0,1,2,3$ sú určené tak, aby v spoji dvoch segmentov bola splnená geometrická spojitosť 2.rádu.
Označme dva susedné segmenty:

$$^{i}\mathbf{q}(\beta 1, \beta 2, t) = \sum_{j=0}^{3} Q_j(\beta 1, \beta 2, t)\mathbf{V}_{i+j} \quad \text{a} \quad ^{i+1}\mathbf{q}(\beta 1, \beta 2, t) = \sum_{j=0}^{3} Q_j(\beta 1, \beta 2, t)\mathbf{V}_{i+j+1}.$$

Každá zmiešavacia funkcia $Q_j(\beta 1, \beta 2, t), j = 0,1,2,3$ je funkciou $\beta 1$, $\beta 2$ a parametra t:

$$Q_j(\beta 1, \beta 2, t) = c_{0j}(\beta 1, \beta 2) + c_{1j}(\beta 1, \beta 2)t + c_{2j}(\beta 1, \beta 2)t^2 + c_{3j}(\beta 1, \beta 2)t^3, t \in \langle 0,1 \rangle, j = 0,1,2,3,$$

a koeficienty $c_{gj}(\beta 1, \beta 2), g = 0,1,2,3, j = 0,1,2,3$, určíme z podmienok geometrickej spojitosti:

- polohová spojitosť G^0-**spojitosť**:

$$^{i+1}\mathbf{q}(\beta 1, \beta 2, 0) = {}^{i}\mathbf{q}(\beta 1, \beta 2, 1)$$

$$\sum_{j=0}^{3} Q_j(\beta 1, \beta 2, 0)\mathbf{V}_{i+j+1} = \sum_{j=0}^{3} Q_j(\beta 1, \beta 2, 1)\mathbf{V}_{i+j}$$

- dotyčnicová spojitosť G^1-**spojitosť**:

$$^{i+1}\mathbf{q}'(\beta 1, \beta 2, 0) = \beta 1\, {}^{i}\mathbf{q}'(\beta 1, \beta 2, 1), \ \beta 1 > 0$$

$$\sum_{j=0}^{3} Q_j'(\beta 1, \beta 2, 0)\mathbf{V}_{i+j+1} = \beta 1 \sum_{j=0}^{3} Q_j'(\beta 1, \beta 2, 1)\mathbf{V}_{i+j}, \ \beta 1 > 0$$

- krivosťová spojitosť G^2-**spojitosť**:

$$^{i+1}\mathbf{q}''(\beta 1, \beta 2, 0) = \beta 1^2\, {}^{i}\mathbf{q}''(\beta 1, \beta 2, 1) + \beta 2\, {}^{i}\mathbf{q}'(\beta 1, \beta 2, 1)$$

$$\sum_{j=0}^{3} Q_j''(\beta 1, \beta 2, 0)\mathbf{V}_{i+j+1} = \beta 1^2 \sum_{j=0}^{3} Q_j''(\beta 1, \beta 2, 1)\mathbf{V}_{i+j} + \beta 2 \sum_{j=0}^{3} Q_j'(\beta 1, \beta 2, 1)\mathbf{V}_{i+j}.$$

Tieto tri podmienky zabezpečia 15 rovníc a doplnením požiadavky:

- rozklad jednotky:

$$\sum_{j=0}^{3} Q_j(\beta 1, \beta 2, t) = 1$$

získame 16 rovníc pre 16 neznámych $c_{gj}(\beta 1, \beta 2), g = 0,1,2,3, j = 0,1,2,3$. Riešením sústavy rovníc sú koeficienty $c_{gj}(\beta 1, \beta 2), g = 0,1,2,3, j = 0,1,2,3$ a funkcie $Q_j(\beta 1, \beta 2, t), j = 0,1,2,3$ môžeme zapísať:

$$Q_0(\beta 1, \beta 2, t) = \frac{1}{\delta}(2\beta 1^3 - 6\beta 1^3 t + 6\beta 1^3 t^2 - 2\beta 1^3 t^3)$$

$$Q_1(\beta 1, \beta 2, t) = \frac{1}{\delta}\left[(4\beta 1^2 + 4\beta 1 + \beta 2) + (6\beta 1^3 - 6\beta 1)t - 3(2\beta 1^3 + 2\beta 1^2 + \beta 2)t^2 + 2(\beta 1^3 + \beta 1^2 + \beta 1 + \beta 2)t^3\right]$$

$$Q_2(\beta 1, \beta 2, t) = \frac{1}{\delta}\left[2 + 6\beta 1 t + 3(2\beta 1^2 + \beta 2)t^2 - 2(\beta 1^2 + \beta 1 + \beta 2 + 1)t^3\right]$$

$Q_3(\beta1,\beta2,t)=\frac{1}{\delta}2t^3$, kde $\delta=2\beta1^3+4\beta1^2+4\beta1+\beta2+2\neq 0$

Teda i- ty segment je opísaný pomocou zmiešavacích funkcií $Q_j(\beta1,\beta2,t), j=0,1,2,3$ a riadiacich bodov $\mathbf{V}_i\ \mathbf{V}_{i+1}\ \mathbf{V}_{i+2}\ \mathbf{V}_{i+3}$:

$${}^i\mathbf{q}(\beta1,\beta2,t)=Q_0(\beta1,\beta2,t)\mathbf{V}_i+Q_1(\beta1,\beta2,t)\mathbf{V}_{i+1}+Q_2(\beta1,\beta2,t)\mathbf{V}_{i+2}+Q_3(\beta1,\beta2,t)\mathbf{V}_{i+3}.$$

K maticovému vyjadreniu β-splajnového segmentu použijeme zápis zmiešavacích funkcií pomocou monomiálnej bázy:

$${}^i\mathbf{q}(t)=\begin{bmatrix}1 & t & t^2 & t^3\end{bmatrix}.\frac{1}{\delta}\begin{bmatrix}2\beta1^3 & 4\beta1^2+4\beta1+\beta2 & 2 & 0\\ -6\beta1^3 & 6\beta1(\beta1^2-1) & 6\beta1 & 0\\ 6\beta1^3 & -3(2\beta1^3+2\beta1^2+\beta2) & 3(2\beta1^2+\beta2) & 0\\ -2\beta1^3 & 2(\beta1^3+\beta1^2+\beta1+\beta2) & -2(\beta1^2+\beta1+\beta2+1) & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{V}_i\\ \mathbf{V}_{i+1}\\ \mathbf{V}_{i+2}\\ \mathbf{V}_{i+3}\end{bmatrix}=$$

$$=T.M_\beta.G_\beta$$

kde matica M_β je maticou koeficientov β-splajnového segmentu a geometrická matica G_β má vstupnú dátovú štvoricu $\mathbf{V}_i\ \mathbf{V}_{i+1}\ \mathbf{V}_{i+2}\ \mathbf{V}_{i+3}$.

Vlastnosti segmentu β-splajnovej krivky:

- Krajné body segmentu ${}^i\mathbf{q}(\beta1,\beta2,t)=\sum_{j=0}^{3}Q_j(\beta1,\beta2,t)\mathbf{V}_{i+j}$:

  začiatok : ${}^i\mathbf{q}(\beta1,\beta2,0)=\frac{1}{\delta}\left[2\beta1^3\mathbf{V}_i+(4\beta1^2+4\beta1+\beta2)\mathbf{V}_{i+1}+2\mathbf{V}_{i+2}\right]$

  koniec : ${}^i\mathbf{q}(\beta1,\beta2,1)=\frac{1}{\delta}\left[2\beta1^3\mathbf{V}_{i+1}+(4\beta1^2+4\beta1+\beta2)\mathbf{V}_{i+2}+2\mathbf{V}_{i+3}\right]$

Pre $\beta1>0$, $\beta2\geq 0$ sú to vnútorné body trojuholníka $\mathbf{V}_i\ \mathbf{V}_{i+1}\ \mathbf{V}_{i+2}$ a $\mathbf{V}_{i+1}\ \mathbf{V}_{i+2}\ \mathbf{V}_{i+3}$, umiestnenie závisí na hodnotách parametrov $\beta1$, $\beta2$.

- Konvexný obal: každá zo zmiešavacích funkcií $Q_j(\beta1,\beta2,t), j=0,1,2,3$ pre $t\in\langle 0,1\rangle$ a $\beta1>0$, $\beta2\geq 0$ nadobúda nezáporné hodnoty a zmiešavacie funkcie tvoria rozklad jednotky, teda bod segmentu je konvexnou kombináciou riadiacich bodov a segment leží v ich konvexnom obale.

Ukončenie β-splajnovej krivky

Pre riadiaci polygón $\mathbf{V}_0,\ldots,\mathbf{V}_n$ je β-splajnová krivka vytvorená z n-2 segmentov:

$${}^0\mathbf{q}(\beta1,\beta2,t),\ldots,{}^{n-3}\mathbf{q}(\beta1,\beta2,t)$$

so začiatkom v bode: ${}^0\mathbf{q}(\beta1,\beta2,0)=\frac{1}{\delta}\left[2\beta1^3\mathbf{V}_0+(4\beta1^2+4\beta1+\beta2)\mathbf{V}_1+2\mathbf{V}_2\right]$

a posledným bodom ${}^{n-3}\mathbf{q}(\beta1,\beta2,1)=\frac{1}{\delta}\left[2\beta1^3\mathbf{V}_{n-2}+(4\beta1^2+4\beta1+\beta2)\mathbf{V}_{n-1}+2\mathbf{V}_n\right]$.

Iné ukončenie krivky sa získa pomocou násobných alebo fantómových bodov.

Technika násobných bodov:

- **dvojnásobné body**: pridaný segment ${}^{-1}\mathbf{q}(\beta 1,\beta 2,t)$ má riadiace body $\mathbf{V}_{-1}=\mathbf{V}_0,\mathbf{V}_0,\mathbf{V}_1,\mathbf{V}_2$ a segment ${}^{n-2}\mathbf{q}(\beta 1,\beta 2,t)$ je určený bodmi $\mathbf{V}_{n-2},\mathbf{V}_{n-1},\mathbf{V}_n,\mathbf{V}_n=\mathbf{V}_{n+1}$ a β-splajnová krivka začína v bode ${}^{-1}\mathbf{q}(\beta 1,\beta 2,0)=\mathbf{V}_0+\frac{2}{\delta}(\mathbf{V}_1-\mathbf{V}_0)$ a končí v bode ${}^{n-2}\mathbf{q}(\beta 1,\beta 2,1)=\mathbf{V}_n+\frac{2\beta 1^3}{\delta}(\mathbf{V}_{n-1}-\mathbf{V}_n)$.
- **trojnásobné body**: pridaný segment ${}^{-2}\mathbf{q}(\beta 1,\beta 2,t)$ má riadiace body $\mathbf{V}_{-2}=\mathbf{V}_{-1}=\mathbf{V}_0,\mathbf{V}_1$, a segment ${}^{n-1}\mathbf{q}(\beta 1,\beta 2,t)$ je určený bodmi $\mathbf{V}_{n-1},\mathbf{V}_n=\mathbf{V}_{n+1}=\mathbf{V}_{n+2}$, v tomto prípade β-splajnová krivka začína v bode ${}^{-2}\mathbf{q}(\beta 1,\beta 2,0)=\mathbf{V}_0$ a končí v bode ${}^{n-1}\mathbf{q}(\beta 1,\beta 2,1)=\mathbf{V}_n$.

Technika fantómových bodov: využíva doplnenie riadiaceho bodu $\mathbf{V}_{-1}$ na začiatku a bodu $\mathbf{V}_{n+1}$na konci postupnosti riadiacich bodov. Výber okrajových podmienok ovplyvní tvar krivky na prvých a posledných segmentoch.
1. **fixovaný (clamped)** na výber krajných bodov
2. **fixovaný (clamped)** špecifikácia vektora 1.derivácie
3. **prirodzený splajn**

2. Modelovanie β-splajnových kriviek: geometrický význam tvarovacích parametrov (globálne parametre)

$\beta 1$-bias, predpätie

Zo vzťahu ${}^{i+1}\mathbf{q}'(\beta 1,\beta 2,0)=\beta 1\,{}^{i}\mathbf{q}'(\beta 1,\beta 2,1)$ vyplýva, že $\beta 1=\dfrac{\left|{}^{i+1}\mathbf{q}'(\beta 1,\beta 2,0)\right|}{\left|{}^{i}\mathbf{q}'(\beta 1,\beta 2,1)\right|}$ t.j. $\beta 1$ je pomer veľkosti vektorov 1.derivácie susedných segmentov krivky v ich spoji.

- Ak hodnoty $\beta 1 > 1$, tak $(i+1)$-vý segment krivky sa priťahuje bližšie k spoločnej dotyčnici ako segment i-ty.
- Pre hodnoty $0<\beta 1<1$ je to obrátene.
- Ak $\beta 1=1$, tak je odklon od dotyčnice v okolí spoja rovnaký.

$\beta 2$-tension, napätie

Označme spoje krivky $\mathbf{S}_i$ t.j. položíme ${}^{i+1}\mathbf{q}(\beta 1,\beta 2,0)=\mathbf{S}_i={}^{i}\mathbf{q}(\beta 1,\beta 2,1)$

a teda $${}^{i}\mathbf{q}(\beta 1,\beta 2,1)=\frac{1}{\delta}\left[2\beta 1^3\mathbf{V}_{i+1}+(4\beta 1^2+4\beta 1+\beta 2)\mathbf{V}_{i+2}+2\mathbf{V}_{i+3}\right]=\mathbf{S}_i.$$

Predpokladajme, že parameter $\beta 1$ je konštanta napr. $\beta 1=1$ a definujme nasledovné parametre: $k:=\delta-\beta 2=2\beta 1^3+4\beta 1^2+4\beta 1+2$ a $\mathbf{K}_i:=2\beta 1^3\mathbf{V}_{i+1}+(4\beta 1^2+4\beta 1)\mathbf{V}_{i+2}+2\mathbf{V}_{i+3}$.

Potom pre spoj $\mathbf{S}_i$ platí: $$\mathbf{S}_i=\frac{1}{k+\beta 2}[\mathbf{K}_i+\beta 2\mathbf{V}_{i+2}].$$

Určíme vektor $\mathbf{V}_{i+2}\,\mathbf{S}_i$ t.j. $$\mathbf{S}_i-\mathbf{V}_{i+2}=\frac{1}{k+\beta 2}[\mathbf{K}_i+k\mathbf{V}_{i+2}].$$

Z tejto rovnosti vyplývajú nasledovné závery:
- Ak $\beta 2>0$, tak $(1/(k+\beta 2)\to 0$ a spoj $\mathbf{S}_i$ sa približuje k „svojmu“ riadiacemu vrcholu $\mathbf{V}_{i+2}$

- Ak $\beta 2 < 0$, tak získame podobný efekt ako pre $\beta 2 > 0$, avšak niektoré zmiešavacie funkcie môžu byť záporné a segment nepadne do konvexného obalu riadiacich bodov a môže mať i slučku.
- Ak $\beta 2 \to -k$, tak $(1/|k+\beta 2| \to \infty$ a bod $\mathbf{S}_i$ sa odtláča od riadiaceho bodu $\mathbf{V}_{i+2}$.

Všimnime si, že vektor $\mathbf{S}_i - \mathbf{V}_{i+2}$ „v podstate" nezávisí na parametri $\beta 2$, okrem menovateľa $k+\beta 2$. To znamená, že vektor $\mathbf{S}_i - \mathbf{V}_{i+2}$ má smer nezávislý od $\beta 2$. Znamená to, že ak modifikujeme $\beta 2$, tak sa mení iba vzdialenosť medzi bodmi nimi určeného vektora. Teda úprava hodnoty $\beta 2$ v spoji má za následok priťahovanie/odtláčanie tohto spoja od príslušného riadiaceho bodu po spojnici $\mathbf{V}_{i+2}\,\mathbf{S}_i$. Teda parameter $\beta 2$ obstaráva mechanizmus modelovania napnutia β-splajnu. Väčšia hodnota $\beta 2$ určuje priliehavú – napnutú krivku s minimálnym počtom inflexných bodov.

3.Vyčísľovanie β-splajnových kriviek

Pri vyčísľovaní β-splajnových segmentov ${}^{i}\mathbf{q}(\beta 1, \beta 2, t) = \sum_{j=0}^{3} Q_j(\beta 1, \beta 2, t)\mathbf{V}_{i+j}$, $t \in \langle 0,1 \rangle$ sa využíva ich prepis na Bezierov kubiky, presnejšie na G^2-spojité zložené Bezierove kubiky – tzv. The Farin-Boehm construction.

Predpokladajme, že máme daný riadiaci polygón určený β-splajnovými riadiacimi bodmi $\mathbf{V}_0, \ldots, \mathbf{V}_n$ a dve skupiny tvarovacích parametrov $\beta\overline{1} = \{\beta 1_0, \beta 1_1, \ldots, \beta 1_n\}$ a $\beta\overline{2} = \{\beta 2_0, \beta 2_1, \ldots, \beta 2_n\}$. Teda neberieme hodnoty $\beta 1$, $\beta 2$ globálne, ale lokálne pre každý segment.

Z týchto dvoch skupín parametrov skonštruujeme postupnosť

$$\gamma_i = \frac{2(1+\beta 1_i)}{\beta 2_i + 2\beta 1_i(1+\beta 1_i)}$$

pre $i = 0,1,\ldots,n$ a z týchto dát vytvoríme dve skupiny Bezierových riadiacich bodov, ktoré opíšeme graficky aj matematicky:

a) na každej strane $\mathbf{V}_i\,\mathbf{V}_{i+1}$, $i = 0,1,\ldots,n-1$, priradíme dva tzv. <u>vnútorné</u> Bezierove body $\mathbf{W}_{i1}$, $\mathbf{W}_{i2}$ (pričom $\mathbf{W}_{01}$, $\mathbf{W}_{n-1,2}$ nebudú nás zaujímať), pre ktoré platí:

$$ratio(\mathbf{V}_i \mathbf{W}_{i1} \mathbf{V}_{i+1}) = \frac{\mathbf{W}_{i1} - \mathbf{V}_i}{\mathbf{V}_{i+1} - \mathbf{W}_{i1}} = \frac{\gamma_i}{1+\beta 1_{i+1}^2 \gamma_{i+1}} \quad \text{a} \quad ratio(\mathbf{V}_i \mathbf{W}_{i2} \mathbf{V}_{i+1}) = \frac{\mathbf{W}_{i2} - \mathbf{V}_i}{\mathbf{V}_{i+1} - \mathbf{W}_{i2}} = \frac{1+\gamma_i}{\beta 1_{i+1}^2 \gamma_{i+1}}$$

Teda môžeme ich vyjadriť:

$$\mathbf{W}_{i1} = \frac{(1+\beta 1_{i+1}^2 \gamma_{i+1})\mathbf{V}_i + \gamma_i \mathbf{V}_{i+1}}{1+\beta 1_{i+1}^2 \gamma_{i+1} + \gamma_i} \quad \text{a} \quad \mathbf{W}_{i2} = \frac{\beta 1_{i+1}^2 \gamma_{i+1} \mathbf{V}_i + (1+\gamma_i)\mathbf{V}_{i+1}}{1+\beta 1_{i+1}^2 \gamma_{i+1} + \gamma_i}, \; i = 0,1,\ldots,n-1.$$

b) na každej strane $\mathbf{W}_{i2}\,\mathbf{W}_{i+1,1}$, $i = 1,\ldots,n-2$, skonštruujeme jeden <u>spojovací</u> Bezierov bod $\mathbf{W}_{i3} = \mathbf{W}_{i+1,0}$ takto:

$$ratio(\mathbf{W}_{i2}\mathbf{W}_{i3}\mathbf{W}_{i+1,1}) = \frac{\mathbf{W}_{i3} - \mathbf{W}_{i2}}{\mathbf{W}_{i+1,1} - \mathbf{W}_{i3}} = \frac{1}{\beta 1_{i+1}} \Leftrightarrow \beta 1_{i+1}(\mathbf{W}_{i3} - \mathbf{W}_{i2}) = (\mathbf{W}_{i+1,1} - \mathbf{W}_{i3})$$

Z toho vyplýva

$$\mathbf{W}_{i3} = \mathbf{W}_{i+1,0} = \frac{1}{1+\beta 1_{i+1}}(\mathbf{W}_{i+1,1} + \beta 1_{i+1}\mathbf{W}_{i2}),\ i = 1,\dots,n\text{-}2.$$

Spojovacie Bezierove body $\mathbf{W}_{i3} = \mathbf{W}_{i+1,0}$ spolu s vnútornými bodmi $\mathbf{W}_{i1}$, $\mathbf{W}_{i2}$ určia n-2 Bezierovych kriviek ${}^{i}\mathbf{b}(t)$ určených dátovými štvoricami $[\mathbf{W}_{i0}, \mathbf{W}_{i1}, \mathbf{W}_{i2}, \mathbf{W}_{i3}]$, $i = 0,1,\dots,n$-2, ktoré sú navzájom pospájané spojovacími riadiacimi bodmi $\mathbf{W}_{i0}$, $\mathbf{W}_{i3}$ do C^0 spojitej splajnovej krivky. Ale vieme dokázať, že splajnová krivka je G^2-spojitá a jej segmenty – Bezierove kubiky s riadiacimi bodmi $[\mathbf{W}_{i0}, \mathbf{W}_{i1}, \mathbf{W}_{i2}, \mathbf{W}_{i3}]$ vyčíslime Casteljau algoritmom.

Parametre $\beta 1_i$, $\beta 2_i$ sú priradené spojom krivky (body $\mathbf{W}_{i3} = \mathbf{W}_{i+1,0}$) a lokálne ovplyvňujú tvar krivky v okolí spoja (medzi spoje zaraďujeme aj začiatočný a koncový bod riadiaceho polygónu).

Špeciálny prípad lokálnych β-splajnových kriviek sú globálne β-splajnové krivky. Tie dostaneme ak položíme $\beta 1_i = \beta 1$ a $\beta 2_i = \beta 2$, pre všetky $i = 0,1,\dots,n$, a to sú β-splajnové krivky, ktorých vytvorenie a modelovanie sme už opísali.