Racionálne B-splajn krivky - NURBS krivky

Non
Uniform
Rational
B-spline Curve**S** (súčasť normy IGES pre krivkový dizajn)

literatúra: Les **Piegl**, Wayne **Tiller**: The *NURBS* Book, Springer 1997),
Rogers: An Introduction to NURBS

Dané:

- **riadiace body** $\mathbf{V}_i$, i= 0,...,n, $\mathbf{V}_i(x_i, y_i, z_i)$ **váhy** w_i, $w_i > 0$, $i = 0,...,n$,

  rozšírené afinné súradnice: $\mathbf{V}_i^w = (w_i x_i, w_i y_i, w_i z_i, w_i) = (w_i \mathbf{V}_i, w_i)$.

- **B-splajnové funkcie** $N_{i,p}(u)$ - stupňa p definované na uzlovom vektore $U = \{u_0, \ ... \ , u_m\}$.

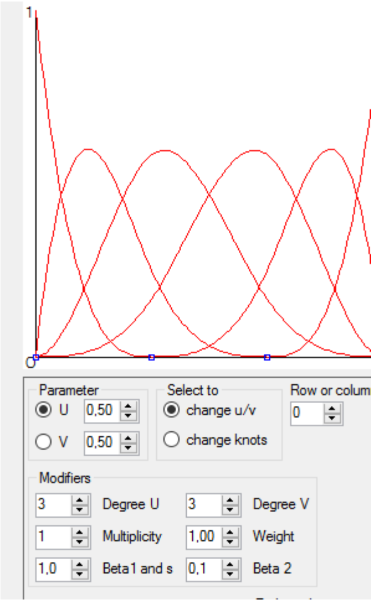
NURBS-krivka stupňa *p* je definovaná:

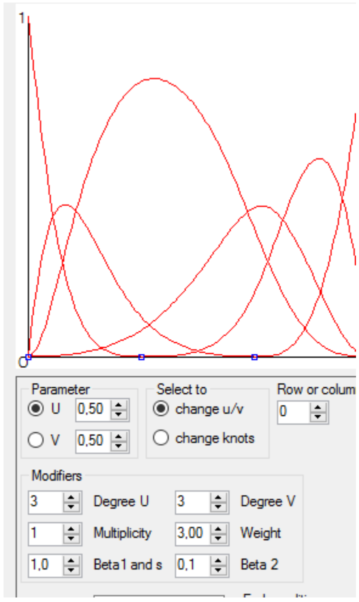
$$\mathbf{s}(u) = \frac{\sum_{i=0}^{n} w_i \mathbf{V}_i N_{ip}(u)}{\sum_{i=0}^{n} w_i N_{ip}(u)} = \sum_{i=0}^{n} R_{ip}(u) \mathbf{V}_i \quad \text{kde} \quad R_{ip}(u) = \frac{N_{ip}(u) w_i}{\sum_{j=0}^{n} w_j N_{jp}(u)}, \ u \in \langle a, b \rangle = \langle u_p, u_{m-p} \rangle,$$

sú racionálne polynómy a funkcie $N_{ip}(u)$ sú B-splajnové funkcie $p°$.

Vlastnosti racionálnych funkcií $R_{ip}(u)$

- <u>nezápornosť</u> : $R_{ip}(u) \geq 0$, pre všetky $i, p,\ u \in \langle u_i, u_{i+p+1})$ ak $w_i > 0$





- <u>rozklad jednotky</u>: pre každé $u \in \langle u_i, u_{i+1})$: $\sum_{j=i-p}^{i} R_{j,p}(u) = 1$

- <u>lokálny nosič</u>: $R_{i,p}(u) = 0$, pre $u \notin \langle u_i, u_{i+p+1} \rangle$

- pre každé $p > 0$ funkcia $R_{ip}(u)$ má <u>jedno maximum</u> $u \in \langle u_i, u_{i+p+1} \rangle$

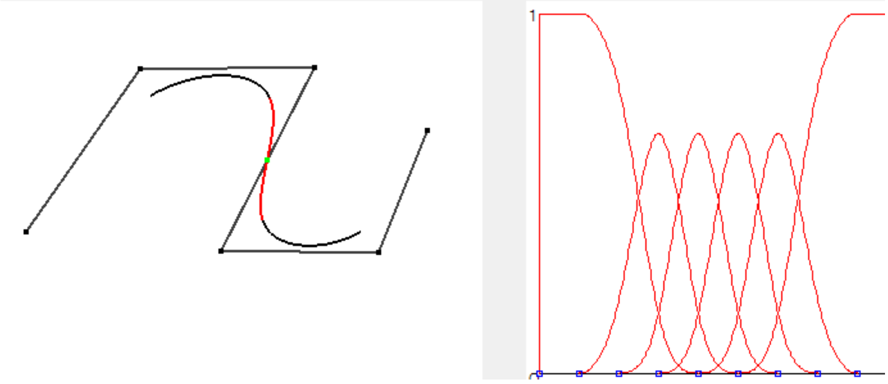
- <u>spojitosť</u>: ak vnútorný uzol u_i má násobnosť k_i, tak funkcia $R_{i,p}(u)$ je v bode $u = u_i$ C^{p-k_i} spojitá a všade inde je C^{∞} spojitá (len mimo uzlov).

- $w_i = 1,\ \ i = 0,\ldots,n$, tak $R_{ip}(u) = N_{ip}(u)$ t.j. B-splajnové funkcie sú špeciálny prípad racionálnych zmiešavacích funkcií $R_{ip}(u)$.

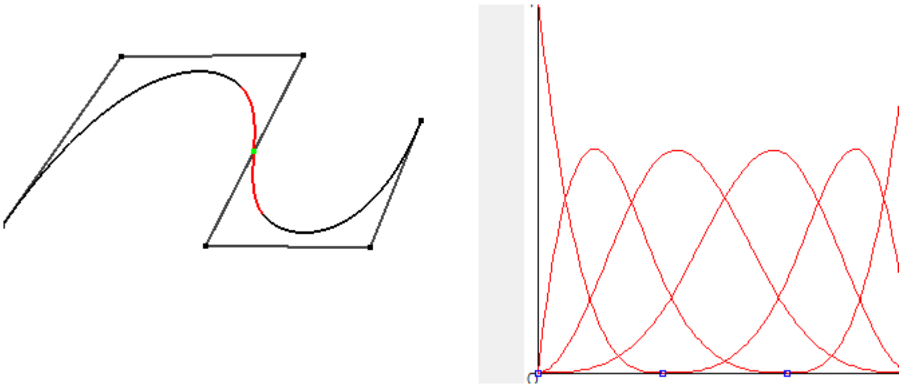
Vlastnosti NURBS-kriviek

Pre riadiace body $\mathbf{V}_i$, i = 0,...,n, váhy w_i, $w_i > 0$, i = 0,...,n, a uzlový vektor $U = \{u_0, \ \dots \ , u_m\}$ má NURBS-krivka stupňa p vlastnosti:

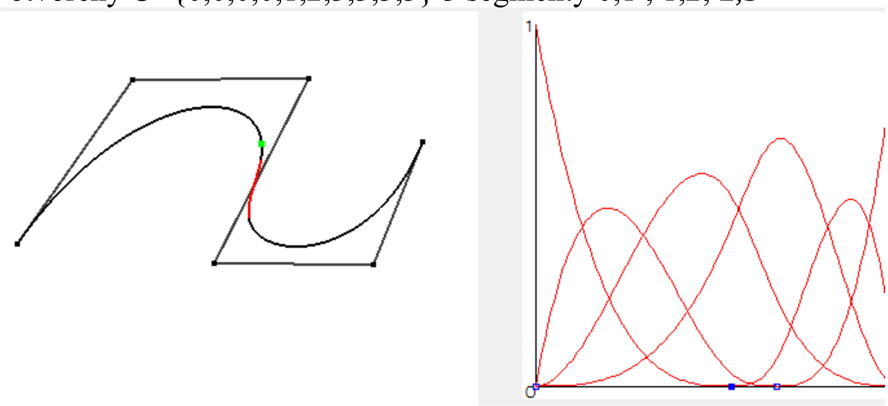
1° **<u>definičný obor</u> funkcií** (kriviek) – interval $D_f = \langle a, b \rangle = \langle u_p, u_{m-p} \rangle$



Uzlový vektor: rovnomerný U={0,1,2,3,4,5,6,7,8,9} 3 segmenty 3,4 ; 4,5; 5, 6

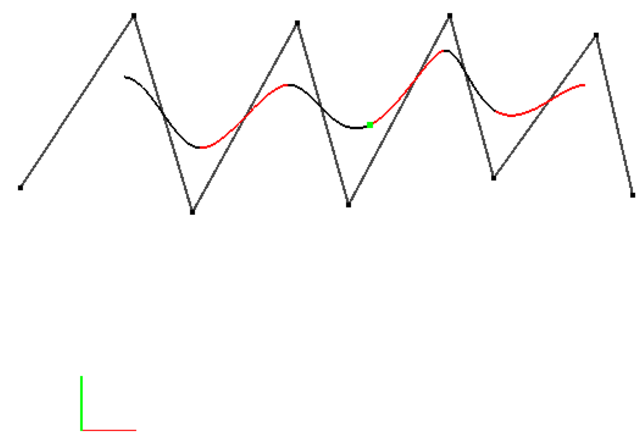


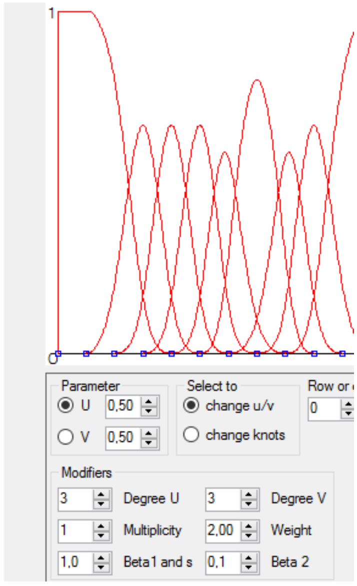
otvorený U={0,0,0,0,1,2,3,3,3,3} 3 segmenty 0,1 ; 1,2; 2,3

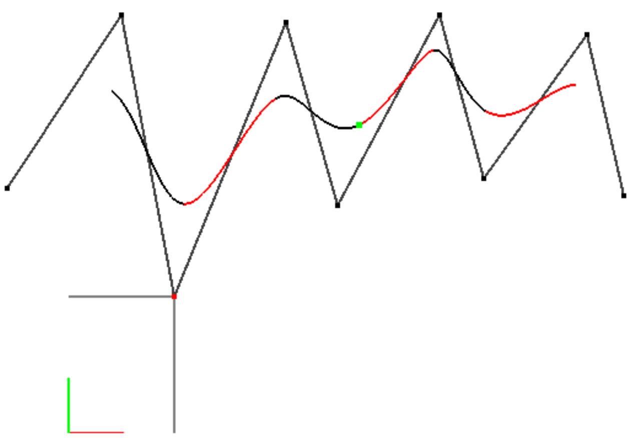


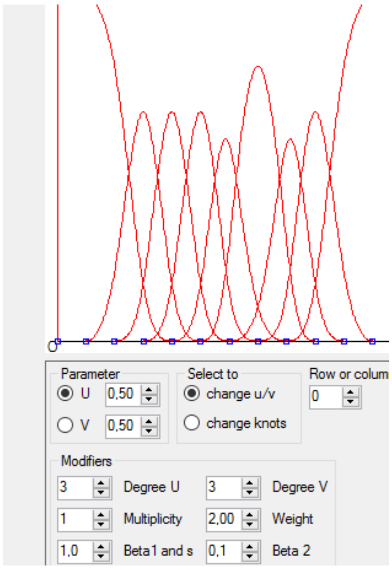
nerovnomerný, otvorený

2° **lokálne riadenie:** segment krivky definovaný na intervale $\langle u_r, u_{r+1})$, $p \le r \le m-p-1$ je určený (len) riadiacimi bodmi $\mathbf{V}_{r-p}, \dots, \mathbf{V}_r$.









3° **konvexný obal:** Ak $u \in \langle u_r, u_{r+1} \rangle$ a $p \le r \le m-p-1$, tak ${}^{r}\mathbf{s}(u) \in KO\left[\mathbf{V}_{r-p}, \dots, \mathbf{V}_r\right]$

4° **spojitosť:** Ak k_i je násobnosť uzla $u = u_i$, tak $\mathbf{s}(u)$ je C^{p-k_i} spojitá v $u = u_i$ a C^{∞} spojitá mimo uzlov

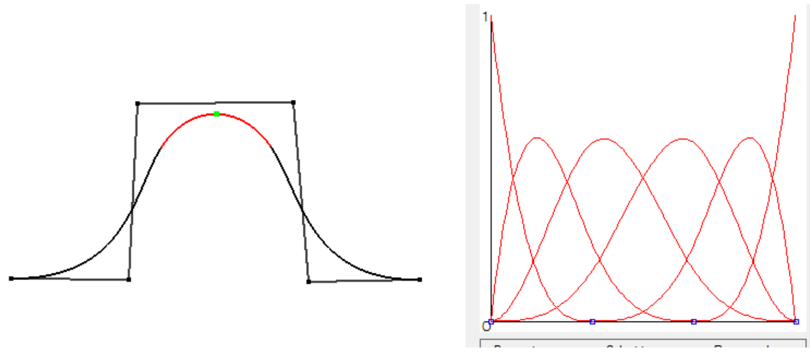
5° **invariantnosť** vzhľadom na **afinné** a **projektívne transformácie** (March 202)

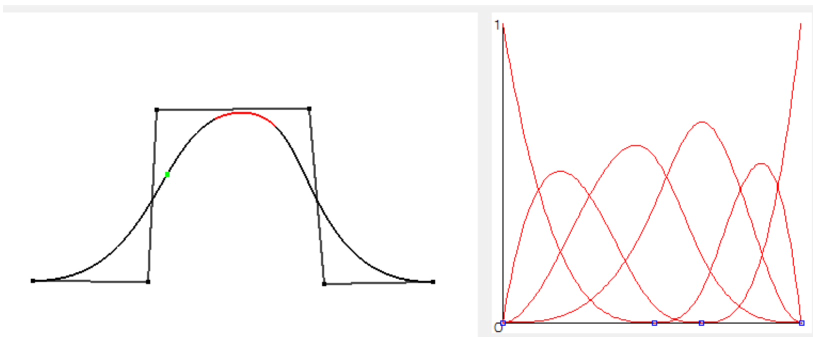
Modelovanie NURBS-kriviek

- <u>**uzlový vektor**</u>

  - otvorený $U = \{a, a, .., a, u_{p+1}, \ \dots \ , u_{m-p-1}, b, b, .., b\}$, interpolácia krajných riadiacich bodov

  - zmeny v uzlovom vektore spôsobia na tvare krivky zmeny, ktoré je ťažko predvídať

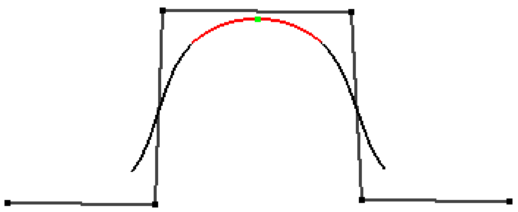


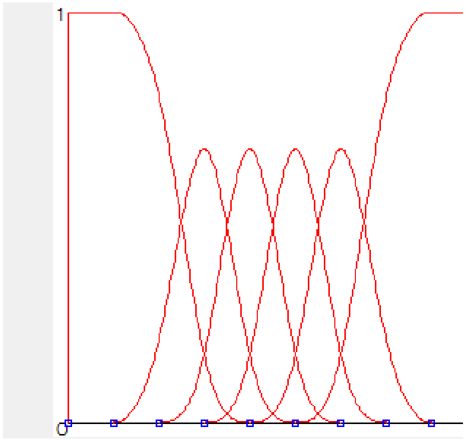


  - za výhodnejšiu zmenu sa používa Boehmov algoritmus vnorenia uzla (opísaný pri B-splajnoch), ktorým sa zabezpečí vyčíslenie nových p riadiacich bodov (ležia na stranách pôvodného riadiaceho polygónu).

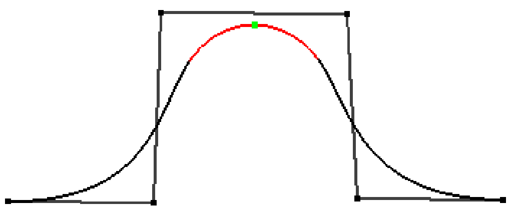
• **zmena váhy**

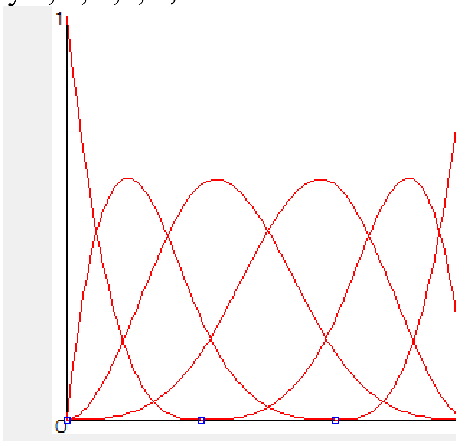
$\mathbf{s}(u)=\sum_{i=0}^{n} R_{ip}(u)\mathbf{V}_i$ je NURBS-krivka a $\bar{u}$ je hodnota parametra z intervalu $\bar{u}\in\langle u_k,u_{k+p+1}\rangle$.





rovnomerný U={0,1,2,3,4,5,6,7,8,9} 3 segmenty 3,4 ; 4,5; 5,6



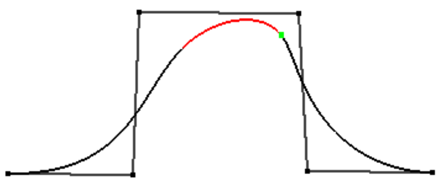


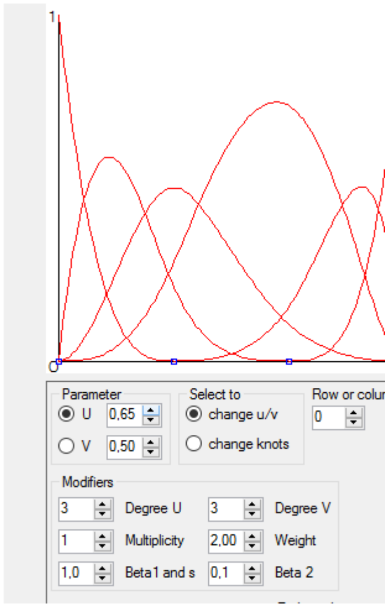
otvorený U={0,0,0,0,1,2,3,3,3,3} 3 segmenty 0,1 ; 1,2; 2,3

$u = \bar{u}$ <0, 3 >

Váha w_k riadiaceho bodu $\mathbf{V}_k$ nadobúda hodnoty: $0 \le w_k < \infty$.
Určíme pre hodnotu parametra $u = \bar{u}$ body na troch NURBS-krivkách:

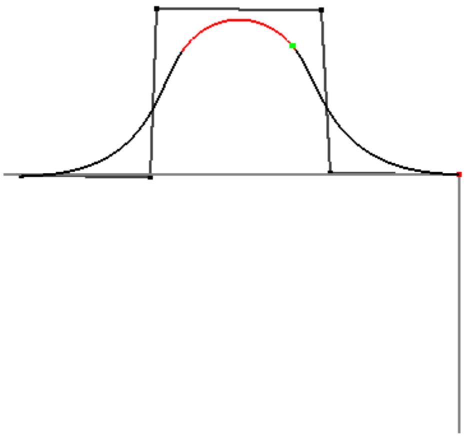
a) w3=2 $\mathbf{P} = \mathbf{s}_1(\bar{u}, w_k \neq 0{,}1)$

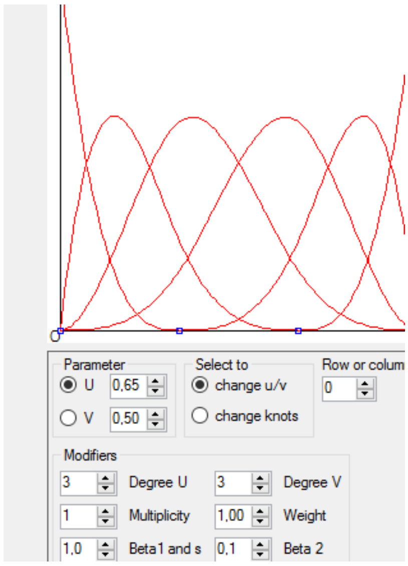




b) w3=0 $\mathbf{R} = \mathbf{s}_2(\bar{u}, w_k = 0)$

c) w3=1 $\mathbf{M} = \mathbf{s}_3(\bar{u}, w_k = 1)$





Označíme $t = \dfrac{N_{kp}(\bar{u})}{\sum_{i\neq j=0}^{n} N_{ip}(\bar{u})w_i + N_{kp}(\bar{u})}$

$v = R_{kp}(\bar{u})$

môžeme zapísať:

$$\mathbf{M} = (1-t)\mathbf{R} + t\mathbf{V}_k$$

$$\mathbf{P} = (1-v)\mathbf{R} + v\mathbf{V}_k .$$

Body $\mathbf{V}_k, \mathbf{R}, \mathbf{M}, \mathbf{P}$ sú kolineárne a ich dvojpomer:

$$(\mathbf{V}_k\mathbf{RMP}) = w_k = \frac{\mathbf{V}_k\mathbf{M}}{\mathbf{RM}} : \frac{\mathbf{V}_k\mathbf{P}}{\mathbf{RP}} .$$

Pre modelovanie:

° ak váha w_k riadiaceho bodu $\mathbf{V}_k$ sa **zväčšuje/zmenšuje**, tak hodnota parametra v sa **zväčšuje/zmenšuje** a krivka je **priťahovaná/odtláčaná** vzhľadom na riadiaci bod $\mathbf{V}_k$

° ak bod **P** sa pohybuje po úsečke incidujúcej bodom $\mathbf{V}_k$, tak krivka mení tvar predpokladaným spôsobom

° ak bod **P** “dosiahne” bod $\mathbf{V}_k$, tak $v \to 1$ a $w_k \to \infty$.