

1. JEDNODUCHÉ KRIVKY – OBLÚKY

Matematické reprezentácie kriviek

Medzi najčastejšie metódy reprezentácie kriviek v geometrickom modelovaní sa zaraďujú opisy pomocou implicitných rovníc, explicitných vyjadrení a parametrických funkcií (bodových, vektorových, súradnicových).

Implicitná rovnica krivky z roviny E^2 so súradnicovou sústavou $\langle O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle$ má tvar $f(x, y) = 0$. Táto rovnica vyjadruje implicitný vzťah medzi súradnicami x a y bodov ležiacich na krivke.

Pri explicitnom vyjadrení je krivka z roviny E^2 reprezentovaná grafom funkcie $y = f(x)$.

Často krát má tento vzťah tvar: $y = a_0 + a_1x + \dots + a_px^p = \sum_{i=0}^p a_ix^i$, kde a_0, \dots, a_p sú reálne konštanty, ktorý pre $a_p \neq 0$ reprezentuje algebraickú krivku stupňa p .

Pri parametrickom vyjadrení priestorovej krivky každú súradnicu x, y, z jej bodu reprezentujeme osobitne pomocou explicitnej funkcie jednej premennej t (t je parameter):

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t) \quad t \in \langle t_{\min}, t_{\max} \rangle.$$

Parametrické vyjadrenie umožňuje vyčísliť pre zvolenú hodnotu parametra $t = t_0$ tri hodnoty $x(t_0), y(t_0), z(t_0)$ – súradnice bodu krivky odpovedajúceho hodnote parametra t_0 . Ak sú funkcie $x(t), y(t), z(t)$ spojité, možno povedať, že príslušná krivka je spjitým obrazom súvislej oblasti parametra $t \in \langle t_{\min}, t_{\max} \rangle$.

Parametrické vyjadrenie krivky možno nahradiť jedinou vektorovou rovnicou $\mathbf{r}(t)$, ktorá je vektorovou funkciou parametra t . Pre zápis tejto vektorovej funkcie použijeme označenie:

$$\mathbf{r}(t) = [x(t), y(t), z(t)]$$

čo je obvyklý súradnicový zápis vektora.

V súčasnosti namiesto vyjadrenia krivky pomocou vektorovej funkcie sa v geometrickom modelovaní častejšie používa jej vyjadrenie v tvare bodovej funkcie. Ak si označíme ľubovoľný bod krivky ako $P(t)$, tak pre jeho polohový vektor $\mathbf{r}(t) = P(t) - O$, platí:

$$P(t) = O + \mathbf{r}(t) = O + x(t)\mathbf{e}_1 + y(t)\mathbf{e}_2 + z(t)\mathbf{e}_3, \quad t \in \langle t_{\min}, t_{\max} \rangle.$$

Táto rovnosť reprezentuje krivku pomocou bodovej funkcie. Pre súradnicový zápis tejto bodovej funkcie použijeme opäť zápis

$$P(t) = [x(t), y(t), z(t)].$$

Vzhľadom na následné štúdium kubických polynomických kriviek, budeme zapisovať vektorovú reprezentáciu krivky v tvare

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1t + \mathbf{a}_2t^2 + \mathbf{a}_3t^3, \quad t \in \langle t_{\min}, t_{\max} \rangle$$

a jej bodovú reprezentáciu v tvare:

$$P(t) = O + \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1t + \mathbf{a}_2t^2 + \mathbf{a}_3t^3, \quad t \in \langle t_{\min}, t_{\max} \rangle$$

kde $\mathbf{a}_j, j=0,1,2,3$, sú vektory priestoru $V(E)$ ($V(E^2), V(E^3)$).

Deriváciou bodovej funkcie $P(t)$, resp. vektorovej funkcie $\mathbf{r}(t)$ v bode $t_0 \in \langle t_{\min}, t_{\max} \rangle$ je vektor

$$\left. \frac{dP(t)}{dt} \right|_{t=t_0} = \mathbf{r}'(t_0) = [x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)]$$

a jej druhou deriváciou je vektor:

$$\left. \frac{d^2P(t)}{dt^2} \right|_{t=t_0} = \mathbf{r}''(t_0) = [x''(t_0), y''(t_0), z''(t_0)].$$

Dotyčnicou krivky danej bodovou [vektorovou] parametrizáciou $P(t) = O + \mathbf{r}(t)$ [$\mathbf{r}(t)$] v bode $P(t_0)$, $t_0 \in \langle t_{\min}, t_{\max} \rangle$, sa rozumie priamka určená bodom $P(t_0)$ a vektorom $P'(t_0) = \mathbf{r}'(t_0)$. Vektor $\mathbf{r}'(t_0)$ sa nazýva *dotykový vektor* krivky v bode t_0 . Jednotkový dotykový vektor krivky

v bode $t = t_0$ je vektor $\mathbf{d}(t_0) = \left. \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} \right|_{t=t_0}$.

Krivosť krivky $P(t) = O + \mathbf{r}(t)$ je skalárna funkcia $k(t) = \frac{|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|^3}$ a pre vektorovú

funkciu $\mathbf{k}(t) = \frac{(\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)) \times \mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|^4}$ je zaužívaný názov *vektor krivosti* krivky $P(t)$ [$\mathbf{r}(t)$]. Na

druhej strane, skalárna veličina (číselná hodnota) $k(t_0)$ sa nazýva *krivosťou* a vektorová veličina $\mathbf{k}(t_0)$ vektorom *krivosti* krivky $P(t)$ v bode $t = t_0$.

Špecifikácie kriviek a splajnov

V geometrickom modelovaní sa stretávame s tromi ekvivalentnými metódami pre špecifikáciu jednotlivých typov reprezentácií kriviek:

(1) *Sformulovanie podmienok*, ktoré sa položia hranice susediacich segmentov splajnu, alebo ich možno zo zadaných geometrických prvkov odvodiť. Najčastejšie sú to požiadavky na hodnoty parametrických vyjadrení krivky, ich derivácií a pod. Môžu to byť napr. hraničné body segmentov, sklony krivky v nich t.j. hodnoty 1.derivácií (prípadne aj vyšších) v hraničných bodoch a pod. Tieto sa obyčajne dajú ľahko vyjadriť ako afinné kombinácie polynomickej koeficientov parametrického vyjadrenia segmentu. Korektnosť voľby podmienok si však vyžaduje, aby sa aj obrátene, polynomicke koeficienty dali vyjadriť ako afinné kombinácie geometrických prvkov reprezentujúcich hraničné podmienky splajnu.

(2) *Voľbou matice*, ktorá reprezentuje typ splajnu. Je to matica, ktorá vyjadruje polynomicke koeficienty ako afinné kombinácie vyššie spomínaných geometrických prvkov.

(3) *Voľbou tzv. zmiešavacích funkcií* reprezentujúcich splajn. Sú to funkcie, ktoré „zliepajú“ geometrické prvky, ktorými je konkrétny splajn určený do parametrického vyjadrenia segmentu krivky, ktoré je afinnou kombináciou geometrických prvkov so zmiešavacími funkciami v úlohe koeficientov.

Na ilustráciu týchto troch splajnových špecifikácií predpokladajme, že parametrická reprezentácia polynomickeho segmentu kubickej krivky je nasledovná:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1 t + \mathbf{a}_2 t^2 + \mathbf{a}_3 t^3, t \in \langle t_{\min}, t_{\max} \rangle.$$

Pre zjednodušenie vyjadrení predpokladajme, že krivka je definovaná na intervale $\langle 0, 1 \rangle$ t.j. $t_{\min} = 0, t_{\max} = 1$.

A.1 Hermitove kubiky

Zápis polynomickej krivky v tvare:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1 t + \mathbf{a}_2 t^2 + \mathbf{a}_3 t^3 = \begin{bmatrix} 1 & t & t^2 & t^3 \end{bmatrix} \cdot [\mathbf{a}_0 \quad \mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad \mathbf{a}_3]^T, t \in \langle 0, 1 \rangle \quad (\text{A})$$

má z hľadiska geometrického modelovania nevýhodu v tom, že nepoznáme geometrický význam koeficientov $\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ a ich vzťah ku krivke.

Výhodnejšie je zadávať takúto krivku jej krajnými bodmi $\mathbf{R}_0, \mathbf{R}_1$ a sklonmi – dotykovými vektormi $\mathbf{r}'_0, \mathbf{r}'_1$ v týchto krajných bodov. Úlohou je napísať parametrické vyjadrenie polynomickej krivky 3° určenej krajnými bodmi $\mathbf{R}_0, \mathbf{R}_1$ a sklonmi $\mathbf{r}'_0, \mathbf{r}'_1$ (dotykové vektory v bodoch $\mathbf{R}_0, \mathbf{R}_1$). Táto krivka zapísaná v tvare

$$\mathbf{r}(t) = \begin{bmatrix} 1 & t & t^2 & t^3 \end{bmatrix} \cdot [\mathbf{a}_0 \quad \mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad \mathbf{a}_3]^T \quad (2)$$

má deriváciu

$$\mathbf{r}'(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2t & 3t^2 \end{bmatrix} \cdot [\mathbf{a}_0 \quad \mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad \mathbf{a}_3]^T.$$

Ak do týchto vzťahov (2) dosadíme hodnoty 0,1 za parameter t a zohľadníme pozíciu, do ktorej sme „nominovali“ body $\mathbf{R}_0, \mathbf{R}_1$ a vektory $\mathbf{r}'_0, \mathbf{r}'_1$ dostaneme:

$$\mathbf{r}(0) = \mathbf{R}_0 \quad \mathbf{r}'(0) = \mathbf{r}'_0$$

$$\mathbf{r}(1) = \mathbf{R}_1 \quad \mathbf{r}'(1) = \mathbf{r}'_1$$

resp.

$$\mathbf{a}_0 = \mathbf{R}_0 \quad \mathbf{a}_1 = \mathbf{r}'_0$$

$$\mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 = \mathbf{R}_1 \quad \mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2 + 3\mathbf{a}_3 = \mathbf{r}'_1$$

Z toho vyplýva:

$$\mathbf{a}_0 = \mathbf{R}_0$$

$$\mathbf{a}_1 = \mathbf{r}'_0$$

$$\mathbf{a}_2 = 3(\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_0) - 2\mathbf{r}'_0 - \mathbf{r}'_1$$

$$\mathbf{a}_3 = 2(\mathbf{R}_0 - \mathbf{R}_1) + \mathbf{r}'_0 + \mathbf{r}'_1$$

Potom môžeme v (A) zapísať:

$$\mathbf{r}(t) = \begin{bmatrix} 1 & t & t^2 & t^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_0 \\ \mathbf{r}'_0 \\ 3(\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_0) - 2\mathbf{r}'_0 - \mathbf{r}'_1 \\ 2(\mathbf{R}_0 - \mathbf{R}_1) + \mathbf{r}'_0 + \mathbf{r}'_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & t & t^2 & t^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_0 \\ \mathbf{R}_1 \\ \mathbf{r}'_0 \\ \mathbf{r}'_1 \end{bmatrix} = T \cdot M_H \cdot G_H \quad (3)$$

Teda $\mathbf{r}(t) = T \cdot M_H \cdot G_H$ je hľadané maticové vyjadrenie polynomického kubického segmentu (A) pomocou geometrických prvkov: krajných bodov $\mathbf{R}_0, \mathbf{R}_1$ a dotykových vektorov $\mathbf{r}'_0, \mathbf{r}'_1$ v týchto krajných bodoch. Tieto sú uložené v tzv. *geometrickej matici* G_H . Matica M_H je tzv. *matica koeficientov Hermita*.

Ak vo vzťahu (3) vynásobíme matice T a M_H dostaneme riadkovú maticu:

$$B_H(t) = \begin{bmatrix} (1 - 3t^2 + 2t^3) & (3t^2 - 2t^3) & (t - 2t^2 + t^3) & (-t^2 + t^3) \end{bmatrix}.$$

Prvky tejto matice označíme:

$$\left[H_{03}(t) = (1 - 3t^2 + 2t^3), H_{33}(t) = (3t^2 - 2t^3), H_{13}(t) = (t - 2t^2 + t^3), H_{23}(t) = (-t^2 + t^3) \right]$$

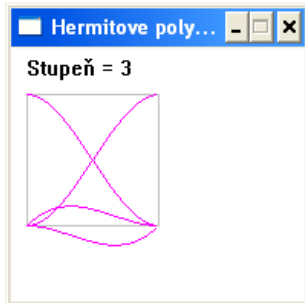
sú to tzv. zmiešavacie funkcie (blending functions).

Teraz parametrickú reprezentáciu polynomického segmentu (A) kubickej krivky zapíšeme pomocou zmiešavacích funkcií a geometrických prvkov:

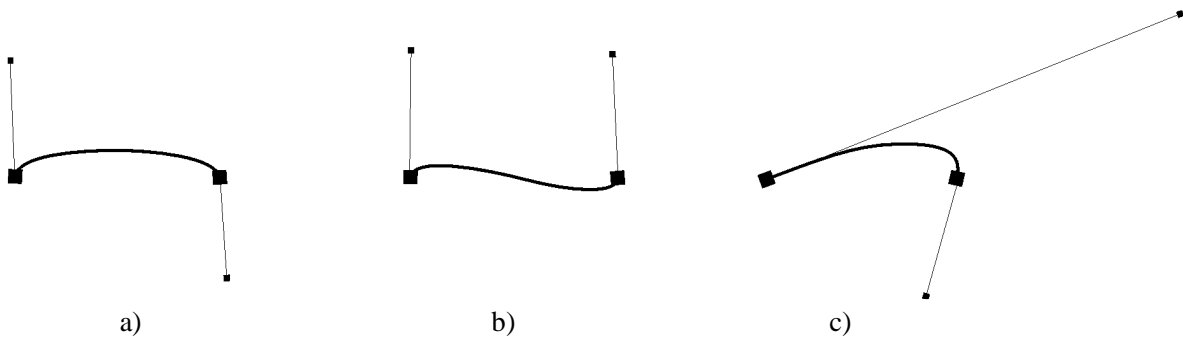
$$\mathbf{h}(t) = H_{03}(t)\mathbf{R}_0 + H_{33}(t)\mathbf{R}_1 + H_{13}(t)\mathbf{r}'_0 + H_{23}(t)\mathbf{r}'_1, \quad t \in \langle 0, 1 \rangle. \quad (4)$$

Túto reprezentáciu (4) segmentu kubickej krivky do literatúry o geometrickom modelovaní zaviedol J. Ferguson (1963). Polynómy $H_j(t), j = 0, 1, 2, 3$, sa nazývajú Hermitove kubické polynómy (Ch. Hermit- francúzsky matematik 19. storočia použil tieto polynómy k interpolácii funkcií) a zabezpečujú stmelenie štyroch vstupných hodnôt $[\mathbf{R}_0, \mathbf{R}_1, \mathbf{r}'_0, \mathbf{r}'_1]$, ktoré nazveme vstupnou dátovou štvoricou. Navyše výsledná krivka interpoluje zadané krajné body i zadané vektory v tom zmysle, že sú hodnotami jej derivácie v krajných bodoch jej definičného oboru. Z tohto dôvodu krivku (4) nazývame **Hermitovou kubickou interpolačnou krivkou** resp. **Hermitovým interpolantom (segmentom)** alebo **Fergusonovou kubikou**.

Niektoré vlastnosti Hermitových kubických polynómov:
1.graf



$$2. H_{03}(t) + H_{33}(t) = 1$$



Hermitove segmenty

A2. Modelovanie Hermitových kriviek.

Každý bod na Hermitovom segmente (4) je vyjadrený ako kombinácia dvoch krajných bodov a dotykových vektorov v týchto bodoch. Graf Hermitovho segmentu s pevnými krajnými bodmi môžeme modelovať pomocou dotykových vektorov v týchto krajných bodoch a to buď zmenou ich veľkosti alebo zmenou ich smeru .

* **zmena veľkosti dotykových vektorov** : položíme $\mathbf{r}'_0 = \alpha_0 \mathbf{d}_0(0)$, $\mathbf{r}'_1 = \alpha_1 \mathbf{d}_1(1)$, $\alpha_0, \alpha_1 > 0$, $\mathbf{d}_i(t)$ sú jednotkové vektory, potom pre

- rovnomerné zväčšovanie/zmenšovanie: $\alpha_0 = \alpha_1$
- nerovnomerné zväčšovanie/zmenšovanie: $\alpha_0 = k \cdot \alpha_1, k > 1$
- $\alpha_0 = \alpha_1 = 0$

* **zmena smeru dotykového vektora**

* **modifikácie tvaru Hermitovho segmentu pomocou parametra:**

- ♣ normalizovaný parameter $t \in \langle 0, 1 \rangle$ a segment nazývame uniformovaný
- ♣ $t_{\max} = \Delta, \Delta > 0$, parameter $t \in \langle 0, \Delta \rangle$ a segment nazývame neuniformovaný

Do vzťahov (2) dosadíme hodnoty 0, Δ za parameter t :

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_0 &= \mathbf{R}_0 & \mathbf{a}_1 &= \mathbf{r}'_0 \\ \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1\Delta + \mathbf{a}_2\Delta^2 + \mathbf{a}_3\Delta^3 &= \mathbf{R}_1 & \mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2\Delta + 3\mathbf{a}_3\Delta^2 &= \mathbf{r}'_1 \end{aligned}$$

s riešením:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_0 &= \mathbf{R}_0 \\ \mathbf{a}_1 &= \mathbf{r}'_0 \\ \mathbf{a}_2 &= \frac{3(\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_0)}{\Delta^2} - \frac{2\mathbf{r}'_0}{\Delta} - \frac{\mathbf{r}'_1}{\Delta} \\ \mathbf{a}_3 &= \frac{2(\mathbf{R}_0 - \mathbf{R}_1)}{\Delta^3} + \frac{\mathbf{r}'_0}{\Delta^2} + \frac{\mathbf{r}'_1}{\Delta^2} \end{aligned}$$

Teda segment krivky môžeme zapísať:

$$\mathbf{h}(t) = \begin{bmatrix} 1 & t & t^2 & t^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{-3}{\Delta^2} & \frac{3}{\Delta^2} & -\frac{2}{\Delta} & -\frac{1}{\Delta} \\ \frac{2}{\Delta^3} & \frac{-2}{\Delta^3} & \frac{1}{\Delta^2} & \frac{1}{\Delta^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_0 \\ \mathbf{R}_1 \\ \mathbf{r}'_0 \\ \mathbf{r}'_1 \end{bmatrix} = T \cdot M_{nH} \cdot G_H \quad (5)$$

Rôzne hodnoty Δ ponúkajú rôzne Hermitove kubiky. Možno povedať, že zväčšovanie hodnoty Δ ťahá krivku v krajných bodoch v smere dotykového vektora. Preto sa často krát „upraví“ vyjadrenie (5) na :

$$\mathbf{h}(t) = \begin{bmatrix} 1 & t & t^2 & t^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_0 \\ \mathbf{R}_1 \\ \Delta\mathbf{r}'_0 \\ \Delta\mathbf{r}'_1 \end{bmatrix} \quad t \in \langle 0, \Delta \rangle$$

A3. Vyčísl'ovacie algoritmy

A. $\mathbf{h}(t) = H_{03}(t)\mathbf{R}_0 + H_{33}(t)\mathbf{R}_1 + H_{13}(t)\mathbf{r}'_0 + H_{23}(t)\mathbf{r}'_1, \quad t \in \langle 0, 1 \rangle$

Výpočet bodov krivky spočíva v dosadzovaní hodnôt parametra t do uvedeného vzťahu a následné spájanie vypočítaných bodov úsečkami.

B. Hornerova schéma

Najjednoduchšou metódou pre výpočet hodnôt polynómov po postupnom vyčísl'ovaní ich členov je Hornerovo pravidlo, ktoré realizuje výpočty postupnou faktorizáciou. Táto si vyžaduje jedno násobenie a jedno sčítanie v každom kroku. Pre polynómy n° je takýchto krokov n .

Ako príklad uvažujme kubickú reprezentáciu: $\mathbf{r}(t) = \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1t + \mathbf{a}_2t^2 + \mathbf{a}_3t^3$.

Pre konkrétnu hodnotu parametra t , vypočítame hodnotu polynómu podľa nasledujúcej faktorizácie členov: $\mathbf{r}(t) = \mathbf{a}_0 + t(\mathbf{a}_1 + t(\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3t))$.

Z nej vidno, že výpočet hodnoty polynómu v bode t si vyžaduje tri násobenia a tri sčítania resp. deväť násobení a deväť sčítaní, ak chceme vypočítať súradnice $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ bodu $\mathbf{r}(t)$.

C. Metóda dopredného diferencovania

Výpočet hodnôt polynómov pomocou dopredného diferencovania súvisí s Taylorovým rozvojom funkcie.

Je to pomerne silná metóda pre vyčísl'ovanie polynomických funkcií a je založená na rekurzívnom určovaní nasledujúcich hodnôt funkcií inkrementáciou – prírastkom zo skôr vypočítaných hodnôt v tvare: $X_{k+1} = X_k + \Delta X_k$ resp. $\Delta X_k = X_{k+1} - X_k$.

Ak teda poznáme prírastok ΔX_k a hodnotu X_k v určitom kroku, tak hodnotu v nasledujúcom kroku dostaneme pripočítaním prírastku k súčasnej hodnote X_k . Prírastok ΔX_k sa nazýva doprednou diferenciou.

B. 1 BEZIEROVE KUBIKY

„bread-and-butter“ curves

Hermitova kubika má v geometrickej matici G_H dva krajné body \mathbf{R}_0 , \mathbf{R}_1 a dva dotykové vektory \mathbf{r}'_0 , \mathbf{r}'_1 v týchto krajných bodov. Tieto Hermitove kubiky modifikáciou veľkostí dotykových vektorov \mathbf{r}'_0 , \mathbf{r}'_1 alebo ich polohy ponúkajú širokú paletu kubických kriviek. Pri ilustrácii týchto kriviek intuitívne cítime zmenu krivky, ale chýba nám výraznejšie „ohraničenie“ oblasti, v ktorej krivka leží.

Autormi spracovania kriviek, ktoré ležia v „ohraničenej“ oblasti boli v období rokov 1958-60 dvaja Francúzi:

Pierre Etienne Bézier – aplikovaný matematik vo firme Renault

Paul de Faget Casteljau - aplikovaný matematik vo firme Citroen.

V roku 1970 poukázal Forrest na súvislosti medzi Bezierovými vyjadreniami a Bernsteinovými polynómami (Bernshtein- ruský matematik odvodil tieto polynómy v roku 1912 v práci o aproximačných teóriach).

Postup opisu kubických Bezierových kriviek ilustrujeme v súlade s myšlienkou „ohraničiť“ oblasť, v ktorej krivka leží. Úpravy zrealizujeme v geometrickej matici G_H :

$$G_H = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_0 & \mathbf{R}_1 & \mathbf{r}'_0 & \mathbf{r}'_1 \end{bmatrix}^T$$

Určíme štvoricu bodov: \mathbf{V}_0 , \mathbf{V}_1 , \mathbf{V}_2 , \mathbf{V}_3 :

$$\mathbf{V}_0 = \mathbf{R}_0, \quad \mathbf{V}_1 = \mathbf{R}_0 + \frac{1}{3}\mathbf{r}'_0, \quad \mathbf{V}_2 = \mathbf{R}_1 - \frac{1}{3}\mathbf{r}'_1, \quad \mathbf{V}_3 = \mathbf{R}_1$$

Kde \mathbf{V}_i , $i=0,1,2,3$, označuje polohové vektory bodov. Vyjadrieme dátovú štvoricu \mathbf{R}_0 , \mathbf{R}_1 a

\mathbf{r}'_0 , \mathbf{r}'_1 pomocou štvorice bodov \mathbf{V}_0 , \mathbf{V}_1 , \mathbf{V}_2 , \mathbf{V}_3 :

$$\mathbf{R}_0 = \mathbf{V}_0, \quad \mathbf{R}_1 = \mathbf{V}_3, \quad \mathbf{r}'_0 = 3(\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_0), \quad \mathbf{r}'_1 = 3(\mathbf{V}_3 - \mathbf{V}_2).$$

Dosadíme do geometrickej matice

$$G_H = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_0 \\ \mathbf{R}_1 \\ \mathbf{r}'_0 \\ \mathbf{r}'_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_0 \\ \mathbf{V}_3 \\ 3(\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_0) \\ 3(\mathbf{V}_3 - \mathbf{V}_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_0 \\ \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \\ \mathbf{V}_3 \end{bmatrix}$$

a následne do vyjadrenia Hermita:

$$\mathbf{h}(t) = T \cdot M_H \cdot G_H = \begin{bmatrix} 1 & t & t^2 & t^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_0 \\ \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \\ \mathbf{V}_3 \end{bmatrix} = T \cdot M_B \cdot G_B.$$

Získali sme maticové vyjadrenie polynomickeho segmentu pomocou geometrických prvkov: bodov: $\mathbf{V}_0, \mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \mathbf{V}_3$. Tieto sú uložené v tzv. geometrickej matici G_B . Lomená čiara $\mathbf{V}_0 \mathbf{V}_1 \mathbf{V}_2 \mathbf{V}_3$ sa nazýva riadiaci polygón a je to vstupná dátová štvorica $[\mathbf{V}_0 \mathbf{V}_1 \mathbf{V}_2 \mathbf{V}_3]$

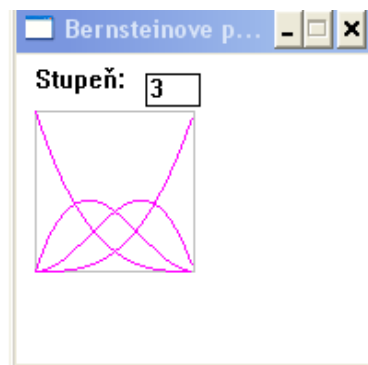
Po vynásobení matíc T a M_B dostaneme riadkovú maticu :

$$B_B(t) = \begin{bmatrix} (1-t)^3 & 3t(1-t)^2 & 3t^2(1-t) & t^3 \end{bmatrix}.$$

Prvky tejto matice označme :

$$B_{03}(t) = (1-t)^3, B_{13}(t) = 3t(1-t)^2, B_{23}(t) = 3t^2(1-t), B_{33}(t) = t^3$$

a sú to zmiešavacie funkcie 3°.



Teraz parametrickú reprezentáciu polynomickeho segmentu (A) kubickej krivky zapíšeme pomocou Bernsteinových polynómov $B_{i3}(t), i = 0, 1, 2, 3$, a riadiacich bodov $\mathbf{V}_0, \mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \mathbf{V}_3$:

$$\mathbf{r}(t) = B_{03}(t)\mathbf{V}_0 + B_{13}(t)\mathbf{V}_1 + B_{23}(t)\mathbf{V}_2 + B_{33}(t)\mathbf{V}_3, t \in \langle 0, 1 \rangle$$

a hovoríme, že je zapísaná v Bezierovom tvare a označuje sa $\mathbf{b}^3(t)$.

Teda:

$$\mathbf{b}^3(t) = \sum_{i=0}^3 \mathbf{V}_i B_{i3}(t), t \in \langle 0, 1 \rangle \quad (1)$$

je Bezierovou krivkou 3° na intervale $\langle 0, 1 \rangle$.

Polynómy $B_{03}(t) = (1-t)^3$, $B_{13}(t) = 3t(1-t)^2$, $B_{23}(t) = 3t^2(1-t)$, $B_{33}(t) = t^3$ môžeme zapísať:

$$B_{i3}(t) = \binom{3}{i} t^i (1-t)^{3-i}, \quad i = 0, 1, 2, 3 \quad (2)$$

sú Bernsteinove polynómy 3°.

Ak vo vzťahoch (1) a (2) zameníme 3 číslom n , dostaneme Bernsteinove polynómy n°

$$B_{i,n}(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}$$

$$\text{kde } \binom{n}{i} = \begin{cases} \frac{n!}{i!(n-i)!} & \text{ak } 0 \leq i \leq n \\ 0 & \text{inak} \end{cases} \quad t \in \langle 0, 1 \rangle \quad 0! = 1$$

a Bezierove krivky n°

$$\mathbf{b}^n(t) = \sum_{i=0}^n B_{i,n}(t) \mathbf{V}_i \quad t \in \langle 0, 1 \rangle$$

Treba však poznamenať, že ak $i \notin \{0, 1, \dots, n\}$ je $\binom{n}{i} = 0$ a teda aj $B_{in}(t) \equiv 0$. Toto prirodzene platí aj pre $n = 3$.

Bernsteinove polynómy majú mnoho zaujímavých vlastností, z ktorých vyplývajú dôležité vlastnosti Bezierových kriviek.

(1) Z vlastnosti kombinačných čísel $\binom{n}{i} = \binom{n-1}{i} + \binom{n-1}{i-1}$ vyplýva, že

$$\binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} = (1-t) \binom{n-1}{i} t^i (1-t)^{n-1-i} + t \binom{n-1}{i-1} t^{i-1} (1-t)^{(n-1)-(i-1)}$$

a teda môžeme zapísať: $B_{in}(t) = (1-t)B_{in-1}(t) + tB_{i-1,n-1}(t)$ tzv. rekurentný vzorec

(2) Z binomickej vety dostávame: $1 = [t + (1-t)]^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} = \sum_{i=0}^n B_{in}(t)$ a teda

$$\sum_{i=0}^n B_{in}(t) = 1, \text{ pre každé } t, \text{ tzv. } \underline{\text{rozklad jednotky}}$$

(3) Z definície Bernsteinových polynómov a predchádzajúcej vlastnosti vyplýva:

$$B_{0n}(0) = 1 \text{ a } B_{in}(0) = 0 \text{ pre } i = 1, 2, \dots, n$$

$$B_{nn}(1) = 1 \text{ a } B_{in}(1) = 0 \text{ pre } i = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

(4) $B_{i,n}(t) \geq 0$ pre každé i, n a $t \in \langle 0, 1 \rangle$, tzv. nezápornosť

V ďalšom texte sa sústreďíme hlavne na Bezierove krivky 3° a preto vyššie uvedené vlastnosti Bernsteinových polynómov nás budú zaujímať pre $n=3$.

Vlastnosti Bezierových kubík

Nech $\mathbf{V}_0, \mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \mathbf{V}_3$ je daná postupnosť bodov v priestore $E(E^2, E^3)$. Potom množina bodov v priestore E , ktorých súradnice vyhovujú rovnici:

$$\mathbf{b}^3(t) = \sum_{i=0}^3 \mathbf{V}_i B_{i3}(t), \quad t \in \langle 0, 1 \rangle,$$

kde $B_{i3}(t), i = 0, 1, 2, 3$, sú Bernsteinove polynómy, je Bezierova krivka 3° .

1. **interpolácia** krajných bodov riadiaceho polygónu : $\mathbf{b}^3(0) = \mathbf{V}_0, \quad \mathbf{b}^3(1) = \mathbf{V}_3$

2. **konvexný obal** : Bezierova krivka $\mathbf{b}^3(t)$ leží v konvexnom obale svojich riadiacich bodov $\mathbf{V}_0, \mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \mathbf{V}_3$ (polynómy $B_{i3}(t)$ sú pre $t \in \langle 0, 1 \rangle$ nezáporné, $\mathbf{b}^3(t)$ je konvexnou kombináciou riadiacich bodov \mathbf{V}_i)

3. **vektor 1.derivácie** :

$$\begin{aligned} \mathbf{b}^{3'}(t) &= \sum_{i=0}^3 B_{i3}'(t) \mathbf{V}_i = -3(1-t)^2 \mathbf{V}_0 + (3(1-t)^2 - 6t(1-t)) \mathbf{V}_1 + 3t(2-3t) \mathbf{V}_2 + 3t^2 \mathbf{V}_3 = \\ &= 3(1-t)^2 (\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_0) + 6t(1-t) (\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_1) + 3t^2 (\mathbf{V}_3 - \mathbf{V}_2) \end{aligned}$$

Ak použijeme $\Delta \mathbf{V}_i = \mathbf{V}_{i+1} - \mathbf{V}_i$, tak

$$\mathbf{b}^{3'}(t) = 3 \begin{bmatrix} (1-t)^2 & 2t(1-t) & t^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{V}_0 & \Delta \mathbf{V}_1 & \Delta \mathbf{V}_2 \end{bmatrix}^T = 3 \sum_{i=0}^2 \Delta \mathbf{V}_i B_{i2}(t)$$

a je to Bezierova krivka 2° na vektorovej zložke.

Pre $t = 0$: $\mathbf{b}^{3'}(0) = 3\Delta \mathbf{V}_0 = 3(\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_0)$, teda Bezierova krivka $\mathbf{b}^3(t)$ sa v začiatočnom bode \mathbf{V}_0 dotýka prvej strany svojho riadiaceho polygónu (dotykový vektor je $3(\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_0)$)

a pre $t = 1$: $\mathbf{b}^{3'}(1) = 3\Delta \mathbf{V}_2 = 3(\mathbf{V}_3 - \mathbf{V}_2)$, Bezierova krivka $\mathbf{b}^3(t)$ sa v koncovom bode \mathbf{V}_3 sa dotýka poslednej strany svojho riadiaceho polygónu (dotykový vektor je $3(\mathbf{V}_3 - \mathbf{V}_2)$).

4. **vektor 2.derivácie** :

$$\mathbf{b}^{3''}(t) = 6 \sum_{i=0}^1 (\mathbf{V}_{i+2} - 2\mathbf{V}_{i+1} + \mathbf{V}_i) B_{i1}(t)$$

Pre $t = 0$: $\mathbf{b}^{3''}(0) = 6(\mathbf{V}_2 - 2\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_0)$ t.j. vektor 2. derivácie v začiatočnom bode \mathbf{V}_0 je rovnobežný s uhlopriečkou rovnobežníka určeného bodmi $\mathbf{V}_0, \mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2$

a pre $t = 1$: $\mathbf{b}^{3''}(1) = 6(\mathbf{V}_3 - 2\mathbf{V}_2 + \mathbf{V}_1)$ t.j. vektor 2. derivácie v koncovom bode \mathbf{V}_3 je rovnobežný s uhlopriečkou rovnobežníka určeného bodmi $\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \mathbf{V}_3$.

Z ďalších vlastností Bezierových kriviek uvádzame:

5. **symetria**

$$\sum_{i=0}^3 B_{i3}(t) \mathbf{V}_i = \sum_{i=0}^3 B_{i3}(1-t) \mathbf{V}_{3-i}$$

t.j. Bezierova krivka sa nezmení ak zameníme poradie jej riadiacich bodov a súčasne parameter t necháme prebiehať od 1 po 0. [lebo $B_{3-i,3}(1-t) = B_{i,3}(t)$]

6.invariantnosť vzhľadom na transformáciu parametra:

$$\sum_{i=0}^3 B_{i,3}(t) \mathbf{V}_i = \sum_{i=0}^3 B_{i,3}\left(\frac{u-a}{b-a}\right) \mathbf{V}_i \quad u \in \langle a, b \rangle \quad t \in \langle 0, 1 \rangle$$

7.afinná invariantnosť Bezierove krivky sú invariantné vzhľadom na afinné transformácie t.j. pre každú afinnú transformáciu T platí:

$$T\left(\sum_{i=0}^3 B_{i,3}(t) \mathbf{V}_i\right) = \sum_{i=0}^3 B_{i,3}(t) T(\mathbf{V}_i)$$

t.j. afinný obraz Bezierovej krivky s vrcholmi \mathbf{V}_i je Bezierova krivka s vrcholmi $T(\mathbf{V}_i)$.

8.pseudolokálne riadenie: Bezierove krivky nemožno lokálne upravovať, zmena riadiaceho bodu \mathbf{V}_i síce spôsobí zmenu tvaru celej krivky, ale výrazné zmeny nastanú v okolí bodu $t = \frac{i}{3}$

(lokálne maximum polynómov) inde sú menej výrazné.

B. 2 Modelovanie Bezierových kubík

$\mathbf{V}_0, \mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \mathbf{V}_3$ vstupná dátová štvorica

- nekolineárne
- kolineárne

BEZIEROVE KRIVKY

(BÈZIER CURVES)

Nech V_0, V_1, \dots, V_n je daná postupnosť bodov v priestore E (E^2, E^3, \dots) a funkcie $B_{in}(t), t \in \langle 0, 1 \rangle$ sú Bernsteinove polynómy. Potom množina bodov v priestore E , ktorých súradnice vyhovujú rovnici

$$\mathbf{b}^n(t) = \sum_{i=0}^n B_{in}(t) \mathbf{V}_i \quad t \in \langle 0, 1 \rangle \quad (\text{A})$$

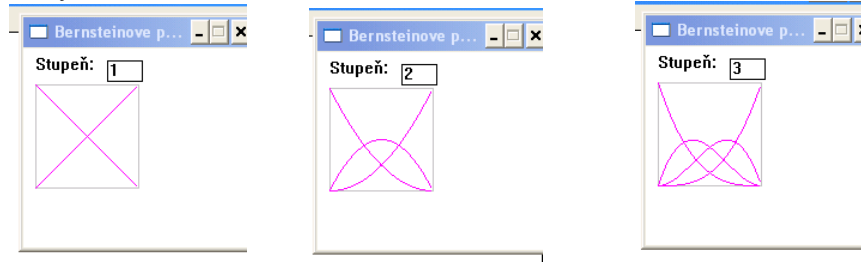
je Bezierova krivka n -tého stupňa.

Vlastnosti Bernsteinových polynómov

$$B_{in}(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}$$

$$\text{kde } \binom{n}{i} = \begin{cases} \frac{n!}{i!(n-i)!} & \text{ak } 0 \leq i \leq n \\ 0 & \text{inak} \end{cases} \quad t \in \langle 0, 1 \rangle \quad 0! = 1$$

Grafy:



1. **Nezápornosť:** $B_{in}(t) \geq 0$ pre každé i, n a $t \in \langle 0,1 \rangle$
2. **Rozklad jednotky:** $\sum_{i=0}^n B_{in}(t) = 1$ pre každé $t \in \langle 0,1 \rangle$
3. **$B_{0n}(0) = B_{nn}(1) = 1$** ; inak $B_{in}(0) = 0$ pre $i=1, \dots, n$; a $B_{in}(1) = 0$ pre $i=0, \dots, n-1$
4. **Symetria:** $B_{in}(1-t) = B_{n-i,n}(t)$ $i=0, \dots, n$
5. **Rekurzia (rekurentný vzorec):** $B_{i,n}(t) = (1-t)B_{i,n-1}(t) + tB_{i-1,n-1}(t)$ $i=1, \dots, n$
kde $B_{-1,n-1}(t) = 0$; $B_{n,n-1}(t) = 0$
6. **Derivácie:**
 - 1.derivácia: $B_{in}'(t) = n\{B_{i-1,n-1}(t) - B_{i,n-1}(t)\}$
 - 2.derivácia: $B_{in}''(t) = n(n-1)\{B_{i-2,n-2}(t) - 2B_{i-1,n-2}(t) + B_{i,n-2}(t)\}$
 $B_{-1,n-1}(t) = 0$; $B_{n,n-1}(t) = 0$
7. **Lokálne Maximum:** polynóm $B_{in}(t)$ má práve jeden lokálny extrém pre $t = \frac{i}{n}$
8. $\{B_{in}(t), i=0, \dots, n\}$ je **báza vektorového priestoru** všetkých polynómov stupňa $\leq n$ (rádu $n+1$)

Vlastnosti Bezierových kriviek

Dané: V_0, V_1, \dots, V_n - riadiace body v priestore E

$B_{in}(t), t \in \langle 0,1 \rangle$ - Bernsteinove polynómy

$$\mathbf{b}^n(t) = \sum_{i=0}^n B_{in}(t) \mathbf{V}_i \quad t \in \langle 0,1 \rangle$$

$$= \begin{bmatrix} B_{0,n}(t) & B_{1,n}(t) & \dots & B_{n,n}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_0 \\ \mathbf{V}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{V}_n \end{bmatrix}$$

Parametrické vyjadrenie v 3D: $\mathbf{V}_i(x_i, y_i, z_i)$

$$x(t) = \sum_{i=0}^n B_{i,n}(t)x_i, \quad y(t) = \sum_{i=0}^n B_{i,n}(t)y_i, \quad z(t) = \sum_{i=0}^n B_{i,n}(t)z_i, \quad t \in \langle 0,1 \rangle$$

I. Interpolácia krajných bodov riadiaceho polygónu $\mathbf{V}_0, \mathbf{V}_n$:

$$\mathbf{b}^n(0) = \mathbf{V}_0 \quad \mathbf{b}^n(1) = \mathbf{V}_n \quad (\text{vlastnosť 3})$$

II. Konvexný obal: Bezierova krivka leží v konvexnom obale určenom riadiacimi vrcholmi ($t \in \langle 0,1 \rangle$) sú Bernsteinove polynómy nezáporné (vlastnosť 1) a spĺňajú rozklad jednotky (vlastnosť 2))

III. Invariantnosť vzhľadom na

a) **afinnú transformáciu T**

$$T\left(\sum_{i=0}^n B_{i,n}(t)\mathbf{V}_i\right) = \sum_{i=0}^n B_{i,n}(t)T(\mathbf{V}_i)$$

b) **afinnú transformáciu parametra**

$$\sum_{i=0}^n B_{i,n}(t)\mathbf{V}_i = \sum_{i=0}^n B_{i,n}\left(\frac{u-a}{b-a}\right)\mathbf{V}_i \quad u \in \langle a,b \rangle \quad t \in \langle 0,1 \rangle$$

IV. Pseudolokálne riadenie : Bernsteinov polynóm $B_{i,n}(t)$, $t \in \langle 0,1 \rangle$ má práve jedno

lokálne maximum pre $t = \frac{i}{n}$. Ak sa zmení riadiaci bod V_i , tak sa zmení jediný člen vo

vyjadrení krivky. Najviac sa zmení v okolí hodnoty $t = \frac{i}{n}$; **globálna krivka**

V. Symetrickosť (súmernosť)

$$\sum_{i=0}^n B_{i,n}(t)\mathbf{V}_i = \sum_{j=0}^n B_{j,n}(1-t)\mathbf{V}_{n-j}$$

VI. Derivácie Bezierovej krivky:

1.-derivácia: $\mathbf{b}'(t) = n \sum_{i=0}^{n-1} B_{i,n-1}(t)(\mathbf{V}_{i+1} - \mathbf{V}_i) = n \sum_{i=0}^{n-1} B_{i,n-1}(t)\Delta\mathbf{V}_i$

Derivácia Bezierovej krivky st. n je krivka st. $n-1$. Nie je to Bezierova krivka podľa definície (A), pretože jej riadiace prvky sú vektory. Je to Bezierova krivka na vektorovej zložke, s riadiacimi bodmi $H_i = O + n\Delta\mathbf{V}_i, i = 0, \dots, n-1$, a nazýva sa **hodograf** Bezierovej krivky:

$$H(t) = \sum_{i=0}^{n-1} H_i B_{i,n-1}(t), H_i = O + n\Delta\mathbf{V}_i$$

2.-derivácia: $\mathbf{b}''(t) = n(n-1) \sum_{i=0}^{n-2} B_{i,n-2}(t)(\mathbf{V}_{i+2} - 2\mathbf{V}_{i+1} + \mathbf{V}_i)$

r-derivácia: $\mathbf{b}^{(r)}(t) = \frac{n!}{(n-r)!} \sum_{i=0}^{n-r} B_{i,n-r}(t)\Delta^r \mathbf{V}_i$, kde $\Delta^r \mathbf{V}_i = \sum_{j=0}^r (-1)^{r-j} \binom{r}{j} \mathbf{V}_{i+j}$

Vyjadrenie derivácie v krajných bodoch Bezierovej krivky $\mathbf{b}^n(t) = \sum_{i=0}^n B_{i,n}(t)\mathbf{V}_i$

$$1.\text{-derivácia } \mathbf{b}^{n'}(0) = n \sum_{i=0}^{n-1} B_{i,n-1}(0) \Delta \mathbf{V}_i = n \Delta \mathbf{V}_0 = n(\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_0);$$

$$\mathbf{b}^{n'}(1) = n \sum_{i=0}^{n-1} B_{i,n-1}(1) \Delta \mathbf{V}_i = n(\mathbf{V}_n - \mathbf{V}_{n-1})$$

2.-derivácia

$$\mathbf{b}^{n''}(0) = n(n-1) \sum_{i=0}^{n-2} (\mathbf{V}_{i+2} - 2\mathbf{V}_{i+1} + \mathbf{V}_i) B_{i,n-2}(0) = n(n-1)(\mathbf{V}_2 - 2\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_0)$$

$$\mathbf{b}^{n''}(1) = n(n-1) \sum_{i=0}^{n-2} (\mathbf{V}_{i+2} - 2\mathbf{V}_{i+1} + \mathbf{V}_i) B_{i,n-2}(0) = n(n-1)(\mathbf{V}_n - 2\mathbf{V}_{n-1} + \mathbf{V}_{n-2})$$

B. 3. Vyčísl'ovacie algoritmy

$$A. \mathbf{b}^3(t) = B_{03}(t)\mathbf{V}_0 + B_{13}(t)\mathbf{V}_1 + B_{23}(t)\mathbf{V}_2 + B_{33}(t)\mathbf{V}_3, \quad t \in \langle 0,1 \rangle$$

Výpočet Bezierovej krivky môžeme zrealizovať dosadzovaním hodnôt parametra t do uvedeného vzťahu a následne pospájať vypočítané body úsečkami. Zmena parametra t je obyčajne konštantná. Tento spôsob nie je veľmi efektívny lebo nerešpektuje veľkosť zakrivenia. Jeho výhodou je, že generuje dopredu známy počet úsečiek.

B. Casteljau algoritmus (CA)

V roku 1959 spracoval de Casteljau pre firmu Citroen algoritmus pre vyčísl'ovanie bodov Bezierovej krivky, ktorým sa bod na krivke vyčísl'uje pomocou lineárnej interpolácie, teda nie priamo pomocou Bernsteinových polynómov, ale vychádza sa z rekurzívnej vlastnosti Bernsteinových polynómov: $B_{in}(t) = (1-t)B_{i-1,n-1}(t) + tB_{i,n-1}(t)$.

Pre kubické Bezierove krivky algoritmus počíta hodnotu $\mathbf{b}^3(t)$ pre pevne zvolené $t \in \langle 0,1 \rangle$:

$$\mathbf{b}^3(t) = \dots = \mathbf{V}_0^3(t)$$

Výpočet možno formálne reprezentovať schémou:

CA: Dané riadiace body: $\mathbf{V}_0, \mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \mathbf{V}_3$, parameter $t \in \langle 0,1 \rangle$

$$\mathbf{V}_i^0(t) = \mathbf{V}_i, \quad i = 0,1,2,3$$

$$\mathbf{V}_i^1(t) = (1-t)\mathbf{V}_i^0(t) + t\mathbf{V}_{i+1}^0(t), \quad i = 0,1,2$$

$$\mathbf{V}_i^2(t) = (1-t)\mathbf{V}_i^1(t) + t\mathbf{V}_{i+1}^1(t), \quad i = 0,1$$

$$\mathbf{V}_i^3(t) = (1-t)\mathbf{V}_i^2(t) + t\mathbf{V}_{i+1}^2(t), \quad i = 0$$

$$\mathbf{b}^3(t) = \mathbf{V}_0^3(t)$$

Zápis CA algoritmu pre $n \in \mathbb{N}$:

Vstup: riadiace body: $\boxed{\mathbf{V}_0, \mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_n}$ a $t \in \langle 0, 1 \rangle$

0) $\mathbf{V}_i^0(t) = \mathbf{V}_i, \quad i = 0, 1, \dots, n$

1) $\mathbf{V}_i^1(t) = (1-t)\mathbf{V}_i^0(t) + t\mathbf{V}_{i+1}^0(t), \quad i = 0, 1, \dots, n-1$

:

r) $\mathbf{V}_i^r(t) = (1-t)\mathbf{V}_i^{r-1}(t) + t\mathbf{V}_{i+1}^{r-1}(t), \quad r = 1, 2, \dots, n; \quad i = 0, 1, \dots, n-r$

:

$n-1$) $\mathbf{V}_0^{n-1}(t) = (1-t)\mathbf{V}_0^{n-2}(t) + t\mathbf{V}_1^{n-2}(t); \quad \mathbf{V}_1^{n-1}(t) = (1-t)\mathbf{V}_1^{n-2}(t) + t\mathbf{V}_2^{n-2}(t)$

n) $\mathbf{V}_0^n(t) = (1-t)\mathbf{V}_0^{n-1}(t) + t\mathbf{V}_1^{n-1}(t)$

Výstup: bod krivky: $\boxed{\mathbf{b}^n(t) = \mathbf{V}_0^n(t)}$

Teda predpis pre CA algoritmus k výpočtu bodu na Bezierovej krivke:

$$\boxed{\mathbf{b}^n(t) = \mathbf{V}_0^n(t)}$$

Vyčíslime pomocou :

$$\boxed{\mathbf{V}_i^r(t) = (1-t)\mathbf{V}_i^{r-1}(t) + t\mathbf{V}_{i+1}^{r-1}(t), \quad r = 1, 2, \dots, n; \quad i = 0, 1, \dots, n-r}$$

Pričom:

$$\boxed{\mathbf{V}_i^0(t) = \mathbf{V}_i}$$

Všimnime si keď robíme CA pre Bezierovu krivku ľubovoľného stupňa n v pevnom bode $t \in \langle 0, 1 \rangle$ potom :

a) na každej strane $\mathbf{V}_i\mathbf{V}_{i+1}$ jej riadiaceho polygónu vytvárame bod $\mathbf{V}_i^1(t) = (1-t)\mathbf{V}_i + t\mathbf{V}_{i+1}$

b) pre každé $r \in \{1, 2, \dots, n\}$ ku každej hrane $\mathbf{V}_i^{r-1}(t)\mathbf{V}_{i+1}^{r-1}(t)$ vytvárame bod

$$\mathbf{V}_i^r(t) = (1-t)\mathbf{V}_i^{r-1}(t) + t\mathbf{V}_{i+1}^{r-1}(t), \quad .$$

Takémuto procesu tvorby bodov sa hovorí **lineárna interpolácia**.

Súvis derivácií s CA-algoritmom:

r -derivácia: $\mathbf{b}^{(r)}(t) = \frac{n!}{(n-r)!} \sum_{i=0}^{n-r} B_{i,n-r}(t) \cdot \Delta^r \mathbf{V}_i$, kde $\Delta^r \mathbf{V}_i = \sum_{j=0}^r (-1)^{r-j} \binom{r}{j} \mathbf{V}_{i+j}$

..... $\mathbf{b}^{(r)}(t) = \frac{n!}{(n-r)!} \Delta^r \mathbf{V}_0^{n-r}(t)$.

Pre $r = 1$ dostaneme: $\mathbf{b}'(t) = n\Delta \mathbf{V}_0^{n-1}(t) = n[\mathbf{V}_1^{n-1}(t) - \mathbf{V}_0^{n-1}(t)]$. Dotykový vektor je určený rozdielom predposledných bodov v CA.

C. Prerozdeľovanie – subdivision

Rekurzívne prerozdeľovacie metódy sa používajú na opätovné delenie segmentov krivky na polovicu, vďaka čomu po každom kroku narastá počet riadiacich bodov. Tieto metódy sú efektívne pri zobrazovaní aproximačných kriviek, pretože rozdeľovací proces môžeme predlžovať dovtedy pokiaľ riadiaci graf neaproximuje krivku dostatočne presne. Súradnice riadiacich bodov potom možno považovať za súradnice bodov krivky a riadiaci polygón stotožniť s krivkou samotnou. Iné použitie prerozdeľovacieho procesu je zamerané na generovanie väčšieho počtu riadiacich bodov pre efektívnejšie upravovanie tvaru krivky. Umožní to navrhovať krivky dost' zložitého tvaru vychádzajúc z nevel'kého počtu riadiacich vrcholov tak, že aplikovaním prerozdeľovacieho procesu si obstaráme ďalšie riadiace body.

Splajnové prerozdeľovanie sa najjednoduchšie aplikuje na krivkové polynomicke segmenty na intervale $\langle 0,1 \rangle$ reprezentované v tzv. Bezierovom tvare t.j. pomocou aproximačného riadiaceho polygónu, ktorého prvý bod je začiatočným a posledný koncovým bodom krivky a dotykové vektory krivky v nich sú určené prvou a poslednou stranou riadiaceho polygónu.

Nech $\mathbf{V}_0, \mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \mathbf{V}_3$ sú riadiace body a $\mathbf{b}^3(t)$ je Bezierova krivka. Pre každé $\alpha \in \langle 0,1 \rangle$ rozdelí bod $\mathbf{b}^3(\alpha)$ Bezierovu krivku na dva segmenty: $LS(t), PS(t)$. Oba segmenty sú segmenty polynomickej krivky 3° a preto ich možno opísať ako Bezierove krivky 3° s riadiacimi bodmi: $LS(t): \mathbf{V}_0^0(\alpha), \mathbf{V}_0^1(\alpha), \mathbf{V}_0^2(\alpha), \mathbf{V}_0^3(\alpha)$ a $PS(t): \mathbf{V}_0^3(\alpha), \mathbf{V}_1^2(\alpha), \mathbf{V}_2^1(\alpha), \mathbf{V}_3^0(\alpha)$ na intervale $\langle 0,1 \rangle$.

Určenie týchto dvoch polygónov sa nazýva **metóda subdivision – prerozdeľovanie**.

Všimnime si, že v diagrame CA-schémy sú riadiace body týchto kriviek na stranách tejto trojuholníkovej schémy.

Najčastejšie sa $\alpha = \frac{1}{2}$, potom je krivka rozdelená do dvoch oblúkov v parametrickom strede (vo všeobecnosti dva oblúky nemajú rovnakú dĺžku). Metódu subdivision možno zopakovať. Každé dva nové riadiace polygóny sa prerozdelia. Tieto kroky možno opakovať ľubovoľný počet krát v závislosti od toho, či prerozdeľujeme krivku preto, aby sme získali viac riadiacich bodov alebo aby sme získali dostatok bodov aproximujúcich body na krivke.

Výsledná postupnosť riadiacich polygónov v závere konverguje ku krivke (konvergencia je rýchla). Na zachytenie „tvaru“ krivky sú potrebné pri rovinnej krivke dve prerozdelenia a v priestore tri prerozdelenia.

V druhom prípade ukončíme prerozdeľovací proces, keď segmenty krivky sú dostatočne malé resp. dĺžka najväčšej strany lomenej čiary je menšia ako dopredu zvolené $\epsilon > 0$.

D. Zvyšovanie stupňa – degree elevation (Farin)

Používa sa na jemné doladenie tvaru krivky, ktoré potrebuje viac riadiacich bodov. Teda potrebujeme pridať riadiaci bod do riadiaceho polygónu bez zmeny tvaru krivky. Riešime to zvýšením stupňa krivky o 1.

$$\begin{aligned}\mathbf{V}_0^{(1)} &= \mathbf{V}_0 \\ \mathbf{V}_i^{(1)} &= \frac{i}{n+1} \mathbf{V}_{i-1} + \left(1 - \frac{i}{n+1}\right) \mathbf{V}_i \quad i = 1, \dots, n \\ \mathbf{V}_{n+1}^{(1)} &= \mathbf{V}_n\end{aligned}$$

E. Metóda dopredného diferencovania (Salomon)